ZSA: Przestrzenie wektorowe $\mathbb{R}^n$
Lista zadań

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska, WPPT

Wrocław • 19.10.2015

Ex. 1 — Obliczenia prowadzimy w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2, -3)$ i $\vec{c} = (0, -1, 1)$.

1. Wyznacz wektory $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$ oraz $\vec{b} - \vec{c}$
2. Wyznacz wektory $2\vec{a}$ oraz $\frac{1}{2}\vec{a}$
3. Wyznacz wektory $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$
4. Wyznacz długości $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$
5. Wyznacz $|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}|$.

Ex. 2 — Ustalmy wektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ taki, że $\vec{a} \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Niech $\vec{b} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

1. Pokaż, że $|\vec{b}| = 1$.
2. Znajdź interpretację otrzymanego wyniku.

Wskazówka: Jak masz kłopoty ze zrobieniem tego zadania dla dowolnego n, to zrób je najpierw dla $n = 2$, potem dla $n = 3$ i wtedy z pewnością poradzisz sobie z ogólnym przypadkiem.

Ex. 3 — Niech $\vec{a} = (1, 2)$ oraz $\vec{b} = (2, 1)$ będą elementami przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

1. Wyznacz zbiór $\{\vec{a} + t \cdot \vec{b} : t \in \mathbb{R}\}$.
2. Wyznacz zbiór $\{\vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) : t \in \mathbb{R}\}$.
3. Wyznacz zbiór $\{\vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) : t \in [0, 1]\}$.
4. Niech $P_t = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$. Zaznacz na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ punkty P_0, $P_{\frac{1}{3}}$, $P_{\frac{1}{2}}$, $P_{\frac{2}{3}}$ oraz P_1.

Ex. 4 — Ustalmy trzy wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$. Niech $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ oraz $\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$.

1. Przyjmując, że $\vec{a} = (2, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$ oraz $\vec{c} = (2, 1)$ zaznacz na rysunku położenie końce wektorów $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\vec{r}$.
2. Niech $\vec{X} = \vec{p} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{p})$, $\vec{Y} = \vec{q} + \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{q})$ oraz $\vec{Z} = \vec{r} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{r})$. Pokaż, że $\vec{X} = \vec{Y} = \vec{Y} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
3. Wywnioskuj z tego, że środkowe w dowolnym trójkącie przecinają się w jednym punkcie.
4. Uogólnij te rozważania na wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ dla dowolnego ustalonego naturalnego n.

Powodzenia,
Jacek Cichoń