ZSA: Dyskretne przestrzenie metryczne
Lista zadań

Robert Rałowski
Politechnika Wrocławska, WPPT

Wrocław • 30.11.2015

Ex. 1 — Wykaż, że przestrzeń metryczna (X, d) jest dyskretna, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$, jednopunktowy zbiór $\{x\}$ jest zbiorem otwartym w (X, d).

Ex. 2 — Wyznacz moc wszystkich kul otwartych z metryką określoną w następujących grafach (V, E):

1. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{3, 6\}\}$,
2. $V = \{1, \dots, n\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ (jest to graf pełny) dla $n \geqslant 3$,
3. $V = \{1, \dots, 2 \cdot n\}$ i $E = \{(i, j) :\ 1 \leqslant i \leqslant n\ \wedge\ n + 1 \leqslant j \leqslant 2n\}$ dla $n \geqslant 0$.

Ex. 3 — Niech (X, d), (Y, ρ) będą dwiema dyskretnymi przestrzeniami metrycznymi. Wykaż, że przestrzeń produktowa $(X \times Y, \sigma)$ jest również dyskretną przestrzenią metryczną, gdzie dla dowolnych $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ σ jest zadana następującym wzorem:

$$\sigma((x, y), (x', y')) = d(x, x') + \rho(y, y').$$

Stosując skończoną indukcję matematyczną, spróbuj uogólnić ten wynik dla n przestrzeni dyskretnych $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$.

Ex. 4 — Niech (X, d), (Y, ρ) będą dwiema dyskretnymi przestrzeniami metrycznymi spełniającymi warunek $X \cap Y = \emptyset$. Ponadto, załóżmy, że istnieje takie $r_0 > 0$, że

$$\max\{diam(X), diam(Y)\} \leqslant r_0.$$

1. Sprawdź, czy $(X \cup Y, \sigma)$ jest przestrzenią metryczną, jeżeli σ jest zdefiniowana następująco
$$\sigma(a, b) = \begin{cases} d(a, b) & \text{dla } a, b \in X \\ \rho(a, b) & \text{dla } a, b \in Y \\ r_0 & \text{gdy } (a \in X \wedge b \in Y) \vee (a \in Y \wedge b \in X) \end{cases},$$
2. Jeżeli odpowiedź z poprzedniego punktu jest twierdząca, to wykaż, że $(X \cup Y, \sigma)$ też jest dyskretną przestrzenią metryczną.
3. Wyznacz moce wszystkich kul dla grafu o dwóch spójnych składowych (V, E), gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ oraz $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}.\{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{8, 5\}, \{5, 7\}\}$.

Ex. 5 — Niech $X = \{(x_1, \dots, x_n) :\ x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}\}$. Udowodnij, że (X, d_H) jest przestrzenią metryczną, gdzie dla dowolnych $x, y \in X$ mamy

$$d_H(x, y) = moc\{k \in \{1, \dots, n\} :\ x_k \neq y_k\}.$$

Funkcja d_H jest nazywana metryką Hamminga.

Ex. 6 — Niech $V = \{(a, b, c) :\ a, b, c \in \{0, 1\}\}$ i

$$E = \{\{(a, b, c,), (a', b', c')\} :\ d_H((a, b, c), (a', b', c') = 1\}.$$

Wyznacz wszystkie kule otwarte o środku w punkcie $(0, 0, 0)$ w metryce Hamminga i metryce grafowej. Czy obie metryki są sobie równe?

Powodzenia,
Robert Rałowski