

Analiza Matematyczna II

Lista zadań

Jacek Cichoń, WPPT PWr, 2016/17

Zadania oznaczone dwoma lub więcej gwiazdkami są przeznaczone do samodzielnego rozwiązania. Jeśli chcecie uzyskać wskazówki lub podyskutować o ich rozwiązaniu, to zapraszam na konsultacje.

1 Powtórka

Zadanie 1 — (Nierówność Jensena) Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Pokaż, że jeśli $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ oraz t_1, \dots, t_n są takimi liczbami, że $t_1, \dots, t_n \geq 0$ oraz $t_1 + \dots + t_n = 1$ to

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

Wskazówka. Zaczynaj od przypadku $n = 2$. Zauważ, że odcinek o końcach w punktach $(x_1, f(x_1))$ oraz $(x_2, f(x_2))$ zawiera się w zbiorze $\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge y \geq f(x)\}$. Następnie zastosuj indukcję matematyczną. Oto początek kroku indukcyjnego

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) &= f\left(\left(1 - t_{n+1}\right) \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 - t_{n+1}} x_i + t_{n+1} x_{n+1}\right) \leq \\ &= (1 - t_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 - t_{n+1}} x_i\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \dots \end{aligned}$$

Zadanie 2 — Średnia geometryczna i arytmetyczna: Zastosuj nierówność Jensena do pokazania, że jeśli $x_1, \dots, x_n \geq 0$, to

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że funkcja $f(x) = -\ln(x)$ jest wypukła na $(0, \infty)$.

Zadanie 3 — Zastosuj nierówność Jensena do pokazania, że jeśli α, β, γ są kątami wewnętrznymi pewnego trójkąta, to

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że funkcja $f(x) = \sin(x)$ jest wklęsła na odcinku $[0, \pi]$. Przydać się może sformułowanie nierówności Jensena dla funkcji wklęsłej..

Zadanie 4 — Oblicz sumy:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, dla $|q| < 1$,
2. $\sum_{n=5}^{\infty} q^n$, dla $|q| < 1$,
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$,
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+3)}$.

Wskazówka: Znajdź liczby A i B takie, że $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$.

Zadanie 5 — Pokaż, że

1. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,
2. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$,
3. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n$ dla $|x| < 1$.
4. $\ln \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ dla $|x| < 1$.

Zadanie 6 — Podaj możliwie prosty dowód wzoru

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

prawdziwego dla wszystkich $q \neq 1$.

2 Przestrzeń euklidesowa

Zadanie 7 — Niech $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Pokaż, że $\langle x, y \rangle$ jest iloczynem skalarnym, czyli, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy:

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$
5. $\langle x, x \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.

Zadanie 8 — Pokaż, że $(x, y) \perp (-y, x)$.

Zadanie 9 — Niech $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Niech $\|\cdot\|_*$ będzie dowolną normą na \mathbb{R}^n . Pokaż, że $\|\frac{x}{\|x\|_*}\|_* = 1$.

Zadanie 10 — Niech $a_1, \dots, a_n > 0$. Definiujemy $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$. Pokaż, że tak zdefiniowana funkcja jest iloczynem skalarnym na \mathbb{R}^n .

Zadanie 11 — Skorzystaj z nierówności Cauchy'ego do pokazania, że dla dowolnych $a, b, t \in \mathbb{R}$ mamy

$$|a \cos(t) + b \sin(t)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Zadanie 12 — Niech $d(x, y)$ oznacza odległość euklidesową w przestrzeni \mathbb{R}^n . Narysuj następujące podzbiory płaszczyzny:

1. $A = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, (1, 1)) < 1\}$
2. $A = \{P \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < d(P, (2, 1)) < 1\}$
3. $A = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, (2, 0)) = d(P, (0, 1))\}$

Zadanie 13 — Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \left(\frac{n}{2n+1}, \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n+1} \right)$$

punktów przestrzeni \mathbb{R}^4 .

Zadanie 14 — Wyznacz punkty skupienia ciągu

$$a_n = \left((-1)^n \frac{n}{n+1}, \frac{\log_2(2^n + 1)}{n}, \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n \right)$$

* **Zadanie 15** — Niech $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ oraz $a_n = f\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$. Wyznacz punkty skupienia tego ciągu.

Zadanie 16 — Pokaż, że funkcje $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ oraz $\|x\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$ są normami na przestrzeni \mathbb{R}^n .

Zadanie 17 — Niech d_1 oraz d_∞ będą metrykami generowanymi przez normy $\|\cdot\|_1$ oraz $\|\cdot\|_\infty$.

1. Wyznacz kule $K_1((0, 0), 1)$ oraz $K_\infty((0, 0), 1)$ w metrykach d_1 oraz d_∞ .
2. Narysuj kule $K_1((2, 1), 1)$ oraz $K_\infty((1, 2), 1)$ w metrykach d_1 oraz d_∞ .

Zadanie 18 — Pokaż, że $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$. **Wskazówka:** W dowodzie drugiej nierówności skorzystaj z nierówności Cauchy'ego.

Zadanie 19 — Pokaż, że $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

**** Zadanie 20** — Niech $\|\cdot\|_*$ będzie dowolną normą na przestrzeni \mathbb{R}^n .

1. Pokaż, że istnieją takie stałe $C, D > 0$, że

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)(C\|x\|_2 \leq \|x\|_* \leq D\|x\|_2).$$

2. Pokaż, że metryki generowane przez dowolne dwie normy na \mathbb{R}^n są równoważne w tym sensie, że dla dowolnego ciągu elementów \mathbb{R}^n jest on zbieżny w jednej z nich wtedy i tylko, gdy jest zbieżny w drugiej z nich.

**** Zadanie 21** — Niech $C([0, 1])$ będzie przestrzenią wektorową funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$. Niech $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$ oraz $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}$.

1. Pokaż, że $\|f\|_2$ jest normą na $C([0, 1])$.
2. Pokaż, że $\|f\|_\infty$ jest normą na $C([0, 1])$.
3. Pokaż, że dla każdej funkcji $f \in C([0, 1])$ mamy $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.
4. Znajdź ciąg funkcji (f_n) który jest zbieżny w normie $\|f\|_2$ ale nie jest zbieżny w normie $\|f\|_\infty$.

Zadanie 22 — **Reguła równoległoboku:** Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie dowolnym iloczynem skalarnym na przestrzeni wektorowej V . Niech $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Pokaż, że wtedy

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Wywnioskuj z tego, że normy $\|\cdot\|_1$ oraz $\|\cdot\|_\infty$ nie są generowane przez żaden iloczyn skalarny.

Zadanie 23 — Wyznacz wnętrza, domknięcia, wnętrza domknięć i domknięcia wewnątrz następujących podzbiorów prostej rzeczywistej:

1. $A_1 = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $A_2 = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.
2. $B_1 = \mathbb{N}$, $B_2 = \mathbb{Z}$
3. $C = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
4. $D = [0, 1] \cup (2, 3) \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$
5. $E = \emptyset$, $F = \mathbb{R}$.

Zadanie 24 — Wyznacz wnętrza i domknięcia następujących podzbiorów \mathbb{R}^2 :

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

Zadanie 25 — Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Kulą otwartą o środku w punkcie $x \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywam zbiór

$$K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

1. Pokaż, że $K(x, r)$ jest zbiorem otwartym.
2. Niech $a, b \in X$, $r_1, r_2 > 0$. Pokaż, że jeśli $d(a, b) > r_1 + r_2$ to $K(a, r_1) \cap K(b, r_2) = \emptyset$.

Zadanie 26 — Rozważamy przestrzeń \mathbb{R}^n z odległością euklidesową. niech $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $r > 0$.

1. Wyznacz $cl(K(x, r))$.

2. Niech $a \in \mathbb{R}^n$. Rozważamy zbiór $K(x, r) + a = \{y + a : y \in K(x, r)\}$. Pokaż, że $K(x, r) + a = K(x + a, r)$.

Zadanie 27 — Pokaż, że suma i przekrój dwóch podzbiorów otwartych dowolnej przestrzeni metrycznej jest zbiorem otwartym. Pokaż, że suma i przekrój dwóch podzbiorów domkniętych dowolnej przestrzeni metrycznej jest zbiorem domkniętym.

1. Czy suma dowolnej rodziny podzbiorów domkniętych \mathbb{R} jest zbiorem domkniętym?
2. Czy przekrój dowolnej rodziny podzbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym?

Zadanie 28 — Załóżmy, że $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są zbiorami otwartymi.

1. Pokaż, że $A \times B$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni \mathbb{R}^2 .
2. Pokaż, że jeśli $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są zbiorami domkniętymi, to $A \times B$ jest podzbiorem domkniętym przestrzeni \mathbb{R}^2 .
3. Samodzielnie uogólnij to zadanie na podzbiory przestrzeni \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m .

Zadanie 29 — Niech (X, d) będzie dowolną przestrzenią metryczną. Załóżmy, że $A \subseteq X$ jest takim zbiorem, że

$$(\forall a \in A)(\exists r > 0)(K(a, r) \cap A = \{a\})$$

Pokaż, że A jest zbiorem domkniętym.

Zadanie 30 — (**Metryka dyskretna**) Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym i niech $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określona wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & : x = y \\ 1 & : x \neq y \end{cases}$$

1. Pokaż, że d jest metryką na zbiorze X (nazywamy ją metryką dyskretną na zbiorze X).
2. Niech $x \in X$ oraz $r > 0$. Wyznacz $K(x, r)$.
3. Pokaż, że każdy zbiór $A \subseteq X$ jest otwarty.
4. Pokaż, że każdy zbiór $A \subseteq X$ jest domknięty.
5. Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem punktów zbioru X , $g \in X$ oraz $d - \lim_n a_n = g$. Pokaż, że

$$(\exists N)(\forall n > N)(a_n = g).$$

Zadanie 31 — Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Niech $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą.

1. Pokaż, że zbiór $\{x \in X : F(x) = 0\}$ jest zbiorem domkniętym.
2. Pokaż, że zbiór $\{x \in X : F(x) \geq 0\}$ jest zbiorem domkniętym.
3. Pokaż, że zbiór $\{x \in X : F(x) > 0\}$ jest zbiorem otwartym.
4. Uogólnij to zadanie na dowolne przestrzenie metryczne

Zadanie 32 — Pokaż, że zbiór $\{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ jest zbiorem domkniętym przestrzeni \mathbb{R}^2 .

Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania. Przyjrzy się funkcji $F(x, y) = x \cdot y$.

Zadanie 33 — Niech $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie funkcją ciągłą. Pokaż, że $\{(x, F(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Zadanie 34 — Niech $(X, d), (Y, \rho), (Z, \eta)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Załóżmy, że funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest ciągła w punkcie $a \in X$ oraz, że funkcja $g : Y \rightarrow Z$ jest ciągła w punkcie $f(a)$. Pokaż, że funkcja $g \circ f : X \rightarrow Z$ jest ciągła w punkcie a .

Zadanie 35 — Załóżmy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest łukowo spójny. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą. Załóżmy, że $a, b \in A$ oraz $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Pokaż, że istnieje $c \in A$ takie, że $f(c) = 0$.

Zadanie 36 — Niech $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie (ciągłą) krzywą taką, że $\|\gamma(0)\| < 1$ oraz $\|\gamma(1)\| > 1$. Pokaż, że γ przecina sferę jednostkową.

* **Zadanie 37** — Niech f będzie funkcją ciągłą na sferze jednostkowej $S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Pokaż, że istnieje punkt $x \in S_2$ taki, że $f(x) = f(-x)$.

3 Funkcje rzeczywiste wielu zmiennych rzeczywistych

Zadanie 38 — Wpisz w pasku wyszukiwarki Google wzory

1. x^2+y^2 ,
2. x^2-y^2 ,
3. $x*y$,
4. $\sin(x+y)$,
5. $\sin(x-y^2)$,
6. $1/(x^2+y^2)$
7. $1/(x^2-y^2)$
8. $5 + (-\sqrt{1-x^2-(y-\text{abs}(x))^2})*\cos(30*((1-x^2-(y-\text{abs}(x))^2)))$, x is from -1 to 1, y is from -1 to 1.5, z is from 1 to 6

Postaraj się zrozumieć te wykresy (poza ostatnim). **Uwaga:** Musisz mieć stosunkowo nową kartę graficzną aby móc wygenerować te wykresy.

Zadanie 39 — Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & : x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pokaż, że dla każdego $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ istnieje taki ciąg punktów $P_n = (x_n, y_n)$ zbieżny do punktu $(0, 0)$ taki, że $\lim_n f(x_n, y_n) = a$.

Zadanie 40 — Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & : x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Pokaż, że dla dowolnego wektora $(a, b) \neq (0, 0)$ mamy $\lim_{t \rightarrow 0} f(ta, tb) = 0$
2. Znajdź taki ciąg punktów $P_n = (x_n, y_n)$ zbieżny do punktu $(0, 0)$, że $\lim_n f(x_n, y_n) = 1$.

Zadanie 41 — Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

1. Pokaż, że f jest ciągła w punkcie $(0, 0)$
2. Pokaż, że f jest ciągła w każdym punkcie płaszczyzny

Zadanie 42 — Wyznacz pochodne następujących funkcji

1. $f(t) = (t^2, t^3 + t, \cos(t^2))$
2. $f(t) = (t \cos(t), t \sin(t))$

Zadanie 43 — Niech $f(t) = (v_x \cdot t, -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_y \cdot t)$ dla pewnych stałych $v_x, v_y, g > 0$.

1. Oblicz $f'(t)$ oraz $f''(t)$.
2. Podaj interpretację fizyczną tego zadania.
3. Niech $(x_\alpha, v_\alpha) = v(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ ($\alpha \in (0, \pi/2)$). Znajdź $t_\alpha > 0$ takie, że $f(t_\alpha) = (x_\alpha, 0)$ dla pewnego $x_\alpha > 0$. Wyznacz x_α . Znajdź kąt α maksymalizujący liczbę x_α .

Zadanie 44 — Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją różniczkowalną, taką, że $(\forall t)(\|f(t)\| = 1)$ Pokaż, że $(\forall t \in \mathbb{R})(f'(t) \perp f(t))$. Podaj interpretację fizyczną tego faktu.

Wskazówka: Zapisz funkcję f w postaci $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ i następnie zauważ, że $(f_1(t))^2 + \dots + (f_n(t))^2 = 1$ dla każdego t .

Zadanie 45 — (Numeryczna metoda Verleta) Niech $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie polem wektorowym. Niech $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie łukiem takim, że

$$\frac{\partial^2 X(t)}{\partial^2 t} = F(X(t))$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

1. Zastosuj wzór Taylora rzędu 4 do wyznaczania $X(t+h)$ oraz $X(t-h)$.
2. Dodaj stronami wyprowadzone wzory do pokazania, że

$$X(t+h) = 2X(t) - X(t-h) + F(X(t)) \cdot h^2 + O(h^4)$$

3. Niech $F(x, y) = -(x, y)/(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$. Pokaż, że dla każdego $(x, y) \neq (0, 0)$ mamy

$$\|F(x, y)\| = \frac{1}{\|(x, y)\|^2}.$$

4. Użyj obserwacji z poprzednich punktów do napisania w dowolnym języku programowania symulatora poruszania się cząstki punktowej w polu centralnym $F(x, y)$ z poprzedniego punktu. Ustaw parametry początkowe $X(0) = (1, 0)$, $\frac{\partial X(0)}{\partial t} = (0, 0.5)$. Weź $h = 0.001$. Wyznacz przybliżone położenia punktów $X(kh)$ dla $k = 0, \dots, 3000$. Zapisz wyniki do pliku tekstowego. Wczytaj je do programu Excel (lub jego odpowiednika) i wyświetl przybliżoną trajektorię ruchu cząstki.

Zadanie 46 — Wyznacz pochodne cząstkowe następujących funkcji

1. $f(x, y) = x^2(x + y)^3$
2. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
3. $f(x, y) = xy \cos(x - y)$
4. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + xe^{y+z}$
5. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
6. $f(x, y, z) = xy + yz + zx$
7. $f(x, y, z) = y(y - z)^x$ określonej na zbiorze otwartym $U = \{(x, y, z) : y - z > 0\}$
8. $f(x, y, z) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

Zadanie 47 — Wyznacz gradienty następujących funkcji

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$
2. $f(x, y, z) = xy^2z^3$
3. $f(x, y, z) = xyz$
4. $f(x, y, z) = 1 + x^2 + 3xy + x^2z$
5. $f(x, y, z) = (xy)^z$

Zadanie 48 — Wyznacz gradienty następujących funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

1. $f(x) = \langle a, x \rangle$
2. $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k (x_k)^2$
3. $f(x) = \frac{1}{\|x\|}$ ($x \neq 0$)

**** Zadanie 49** — Czy gradient zależy od wyboru iloczynu skalarnego?

Zadanie 50 — Wyznacz pochodne kierunkowe następujących funkcji w zadanych punktach P i kierunkach a :

1. $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$, $P = (1, 2, 1)$; $a = [1, 1, 1]$
2. $f(x, y, z) = xyz$, $P = (1, -1, 1)$, $a = [2, 1, 2]$
3. $f(x, y, z) = x \cos(yz)$, $P = (0, 0, 0)$, $a = [1, 1, 1]$

Zadanie 51 — Wyznacz macierze Jacobiego następujących funkcji:

1. $f(x, y) = \begin{bmatrix} x + y^2 \\ x + y \end{bmatrix}$
2. $f(x, y) = \begin{bmatrix} xy \\ \sin(x + y) \\ e^{xy} \end{bmatrix}$

$$3. f(x, y, z) = \begin{bmatrix} xyz \\ \sin(x + yz) \end{bmatrix}$$

Zadanie 52 — Wyznacz pochodne wszystkie cząstkowe drugiego stopnia wszystkich funkcji z Zadania 46 oraz wyznacz ich Hesjany.

Zadanie 53 — Pokaż, że funkcja $f(x) = \|x\|$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ oraz znajdź jej pochodną.

Zadanie 54 — Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednorodną funkcją klasy C^1 (jednorodność oznacza, że dla pewnego k mamy $f(tx) = t^k f(x)$). Pokaż, że $k \geq 1$ oraz, że

$$\sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}(x) x_i = k f(x).$$

Zadanie 55 — Jak wygląda Jakobian funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie x ? Jak się mnoży macierze o wymiarach 1×1 ? Porównaj wzór $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ dla funkcji rzeczywistych jednej zmiennej ze wzorem

$$J_{g \circ f}(\vec{x}) = J_g(f(\vec{x})) \circ J_f(x).$$

Zadanie 56 — Wyznacz macierz Jacobiego funkcji $f(r, t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ oraz $f(r, t, h) = (r \cos(t), r \sin(t), h)$.

Zadanie 57 — Zbadaj ekstrema podanych funkcji:

1. $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + 4xy + y^4 - 2y^2$
2. $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
3. $f(x, y) = x^2 y^2 (-x - y + 5)$
4. $f(x, y) = xy^2 (-x - y + 4)$
5. $f(x, y) = \cos(x - y) + \sin(x) + \cos(y)$
6. $f(x, y) = (x - 1)^2 - 2y^2$

Zadanie 58 — Niech $f(x, y) = (x \cdot y, x + y)$ oraz $g(x, y) = (e^x, x \cdot y)$

1. Wyznacz złożenie $g \circ f$
2. Oblicz macierze Jacobiego J_f , J_g oraz $J_{g \circ f}$
3. Wyznacz $J_g(f(x, y))$
4. Oblicz $J_g(f(x, y)) \circ J_f(x, y)$.

Zadanie 59 — Niech $f(x, y)$ będzie funkcją różniczkowalną oraz niech $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Pokaż, że

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$

* **Zadanie 60** — Ile jest pochodnych cząstkowych m -tego rzędu nieskończenie różniczkowalnej funkcji 3 zmiennych? funkcji m zmiennych?

Zadanie 61 — Znajdź wymiary otwartego zbiornika prostopadłościennego o objętości 4 m^3 o najmniejsze powierzchni bocznej.

Zadanie 62 — Niech $g(x, y, z) = x \cdot y + z$, $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$ i $z(t) = t^2$. Oblicz $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t))$.

Zadanie 63 — Niech $g(x, y, z, u) = e^x \cdot y \cdot z$, $x(t) = t^2$, $y(t) = 1 + t$, $z(t) = \frac{1}{t}$, $u(t) = \ln(t)$. Oblicz $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t), u(t))$.

Zadanie 64 — Wyznacz równanie stycznej do hiperboli zadanej równaniem $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ w punkcie (x_0, y_0) (leżącym na tej hiperboli).

Zadanie 65 — Wyznacz ekstrema warunkowe funkcji $f(x, y)$ przy warunku $g(x, y) = 0$ dla następujących funkcji

1. $f(x, y) = x^2 + y^2, g(x, y) = xy - 1$
2. $f(x, y) = x^3 + y^3, g(x, y) = x + y - 2$
3. $f(x, y) = x + y, g(x, y) = e^{x+y} - xy - 1$
4. $f(x, y) = x^a y^b, g(x, y) = x + y - 1$ (a, b są ustalonymi liczbami dodatnimi).

4 Całki wielokrotne

Zadanie 66 — Oblicz następujące całki podwójne:

1. $\int_1^4 dx \int_2^4 xy dy$
2. $\int_0^a dx \int_0^b xy(x - y) dy$
3. $\int_{x=1}^{x=2} \int_{y=1}^{y=3} (x + xy) dx dy$
4. $\iint_P (x^2 y + 2xy^3) dx dy$, gdzie $P = [1, 2] \times [2, 4]$
5. $\iint_P x \sin(xy) dx dy$, gdzie $P = [0, 1] \times [\pi, 2\pi]$
6. $\int_0^1 \int_0^1 |x - y| dx dy$
7. $\iint_A e^{\frac{x}{y}} dx dy$, gdzie $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$

Zadanie 67 — Oblicz całkę $\iint_P \sin(x) \cos(y) dx dy$, gdzie obszarem całkowania jest trójkąt o wierzchołkach $P = (0, 0), Q = (0, \pi/2)$ i $R = (\pi/2, 0)$.

Zadanie 68 — Oblicz następujące całki po obszarach ograniczonych wskazanymi krzywymi:

1. $\iint_D xy^2 dx dy$, $D: y = x, y = 2 - x^2$
2. $\iint_A e^{\frac{x}{y}} dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{x}, y = 1$
3. $\iint_B e^{x^2} dx dy$, $D: x = 0, x = \ln(\sqrt{2}), y = 0, y = 2x$

Zadanie 69 — Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sin(y) \wedge 0 \leq y \leq \pi\}$.

1. Oblicz powierzchnię zbioru A
2. Oblicz $\iint_A x dx dy$
3. Oblicz $\iint_A y dx dy$
4. Oblicz $\iint_A xy dx dy$

Zadanie 70 — Prostopadłościan o podstawie $P = [0, a] \times [0, b]$ położonej w płaszczyźnie OXY został ścięty od góry powierzchnią $z = x^2 + y^2$. Oblicz objętość tak powstałej bryły.

Zadanie 71 — Pokaż, że $\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx\right) \cdot \left(\int_c^d g(y) dy\right)$.

Zadanie 72 — Oblicz $\int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x) \sin(y) dx dy$.

Zadanie 73 — Oblicz objętość przekroju dwóch walców $V_1 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq r^2\}$ oraz $V_2 = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq r^2\}$.

Zadanie 74 — Znajdź objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

1. $y = x^2, z = x^2 + y^2, y = 1, z = 0$
2. $z^2 = xy, x + y = 2, x + y = 4$
3. $z = x^2 + y^2, xy = 1, xy = 2, y = \frac{1}{2}x, y = 2x$

Zadanie 75 — Oblicz następujące całki potrójne:

1. $\int_{x=0}^1 \int_{y=1}^2 \int_{z=2}^2 (1 + x + xy) dx dy dz$
2. $\iiint_P (xyz) dx dy dz$, gdzie $P = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$
3. $\iiint_P (x + y + z) dx dy dz$, gdzie $P = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$

Zadanie 76 — Wyznacz masę prostopadłościanu $P = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ wiedząc, że gęstość masy w punkcie (x, y, z) wyraża się wzorem $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$.

Zadanie 77 — Niech $\Sigma_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1, \dots, x_n \wedge x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$. Wyznacz $\int_{\Sigma_n} x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n dx_1 dx_2 \dots dx_n$. **Wskazówka:** Rozwiąż to zadanie dla $n=1$, $n=2$ i $n=3$ i spróbuj na podstawie tych wyników postawić ogólną hipotezę.

Zadanie 78 — Oblicz wartość średnią funkcji $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$ na obszarze $[0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

4.1 Zamiana zmiennych

Zadanie 79 — Niech $\Phi_b(x, y) = (x + by, y)$.

- Niech $a, h > 0$ oraz $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq h - \frac{h}{a}x\}$. Naskicuj obszar T . Jaka jest jego powierzchnia?
- Wyznacz Jakobian funkcji Φ_b .
- Pokaż, że dla dowolnej figury $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mamy $\text{pow}(A) = \text{pow}(\Phi_b[A])$.
- Wyznacz obraz $\Phi_b[T]$.
- Jakie jest pole figury $\Phi_b[T]$?

Zadanie 80 — Niech

$$O_\phi(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(to jest obrót płaszczyzny względem środka układu współrzędnych o kąt ϕ). Pokaż, że dla dowolnej figury A mamy $\text{pow}(A) = \text{pow}(O_\phi(A))$.

Zadanie 81 — Pokaż, że jeśli $T_{\vec{v}}$ jest przesunięciem przestrzeni \mathbb{R}^n o wektor \vec{v} , to dla dowolnej n -wymiarowej bryły A mamy $\lambda^n(A) = \lambda^n(T_{\vec{v}}(A))$.

Zadanie 82 — Pokaż, że objętość elipsoidy zadanej równaniem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ wyraża się wzorem $\frac{4}{3}\pi abc$. **Wskazówka:** Rozważ odwzorowanie liniowe \mathbb{R}^3 w \mathbb{R}^3 zadane wzorem $\Psi(x, y, z) = (ax, by, cz)$.

Zadanie 83 — Niech T będzie niezdegenerowanym trójkątem na płaszczyźnie o wierzchołkach $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ i $C = (c_1, c_2)$. Załóżmy, że wszystkie współrzędne $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ są liczbami całkowitymi. Pokaż, że $\text{pow}(T) \geq \frac{1}{2}$. **Wskazówka:** Zapisz powierzchnię trójkąta T za pomocą pewnego wyznacznika.

Zadanie 84 — Oblicz następujące całki po wskazanych obszarach:

- $\iint_K \sin(x^2 + y^2) dx dy$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \pi\}$,
- $\iint_D (2 \cdot x \cdot y) dx dy$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \wedge 2^2 \leq x^2 + y^2 \leq 5^2\}$,
- $\iint_K e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- $\iint_R x^2 dx dy$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \wedge 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Zadanie 85 — Znajdź powierzchnię obszaru R ograniczonego przez krzywe $r = 2 + \sin(3\theta)$ and $r = 4 - \cos(3\theta)$.

Zadanie 86 — Oblicz następujące całki po wskazanych bryłach:

- $\iiint_K (10 - x^2 - y^2 - z^2) dz dy dx$, $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
- $\iiint_V 1_V dx dy dz$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Zadanie 87 — Niech V będzie bryłą która powstała z usunięcia z połowy kuli $K = \{(x, r, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq 0\}$ kuli $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$ (czyli $V = K \setminus A$). Oblicz objętość V .

Wskazówka: Pokaż najpierw, że równanie $r = 2 \cos(\theta)$ (we współrzędnych sferycznych) wyznacza brzeg kuli A : ze wzoru $r = 2 \cos(\theta)$ wywnioskuj, że $r^2 = 2z$, czyli, że $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

Zadanie 88 — Niech L będzie „stożkiem lodów” ograniczonym z dołu przez powierzchnię $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ oraz z góry przez powierzchnię $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Wyznacz objętość bryły L .

Zadanie 89 — Zastosuj współrzędne cylindryczne do wyprowadzenia wzoru na objętość walca o promieniu podstawy r i wysokości h .

Zadanie 90 — Zastosuj współrzędne cylindryczne do wyprowadzenia wzoru na objętość stożka o promieniu podstawy r i wysokości h .

Zadanie 91 — Załóżmy, że $\sigma > 0$. Oblicz następujące całki:

1. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$
2. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$
3. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$

Zadanie 92 — Na wykładzie pokazaliśmy, że n -wymiarowa objętość n -wymiarowej kuli o promieniu R wyraża się wzorem $a_n R^n$, gdzie liczby a_n spełniają następującą rekurencyjną zależność $a_{n+1} = \frac{2\pi}{n+2} a_n$. Stosując ten wzór wyznacz objętości n -wymiarowych kul o promieniu R dla wszystkich $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Zadanie 93 — Niech $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Niech \cdot oznacza iloczyn skalarny. Pokaż, że

$$\frac{d}{dt}(F(t) \cdot G(t)) = \left(\frac{d}{dt}F(t)\right) \cdot G(t) + F(t) \cdot \left(\frac{d}{dt}G(t)\right)$$

Zadanie 94 — Niech $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Niech \times oznacza iloczyn wektorowy. Pokaż, że

$$\frac{d}{dt}(F(t) \times G(t)) = \left(\frac{d}{dt}F(t)\right) \times G(t) + F(t) \times \left(\frac{d}{dt}G(t)\right)$$

c.d.n.

Powodzenia,

Jacek Cichoń