Analiza Matematyczna II
Lista zadań

Jacek Cichoń, WPPT PWr, 2017/18

Zadania oznaczone dwoma lub więcej gwiazdkami są przeznaczone do samodzielnego rozwiązania. Jeśli chcecie uzyskać wskazówki lub podyskutowac o ich rozwiązaniu, to zapraszam na konsultacje.

1 Powtórka

Zadanie 1 — Zastosuj nierówność Jensena do pokazania, że jeśli α, β, γ są kątami wewnętrznymi pewnego trójkąta, to

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że funkcja $f(x) = \sin(x)$ jest wklęsła na odcinku $[0,\pi]$. Przydać się może sformułowanie nierówności Jensena dla funkcji wklęsłej..

Zadanie 2 — Podaj możliwie prosty dowód wzoru $\sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Zadanie 3 — Podaj możliwie prosty dowód wzoru $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. prawdziwego dla wszystkich $q \neq 1$. Co się dzieje jak $q = 1$?

Zadanie 4 — Oblicz sumy:

1. $\sum_{n=5}^{\infty} q^n$, dla $|q| < 1$,
2. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+2)}$,
3. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+3)}$.

   Wskazówka: Znajdź liczby A i B takie, że $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$.

2 Szeregi

Zadanie 5 — Pokaż, że jeśli szeregi $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ są zbieżne oraz a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, to szereg $\sum_n(a\cdot a_n + b\cdot b_n)$ jest zbieżny oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a\cdot a_n+b\cdot b_n)=a\sum_{n=0}^{\infty}a_n+b\sum_{n=0}^{\infty}b_n\ .$$

Zadanie 6 — Oblicz sumy $\sum_{n\geq n}(\frac{3}{2^n}+\frac{1}{3^n})$, $\sum_{n\geq 1}\sum_{k=2}^{5}\left(\frac{1}{k}\right)^n$

Zadanie 7 — Oblicz sumy $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+2)}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+3)}$.
Wskazówka: Znajdź liczby A i B takie, że $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$.

Zadanie 8 — Zbadaj zbieżność następujących szeregów: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Zadanie 9 — Zastosuj kryterium zbieżności d'Alamberta do zbadania zbieżności szeregów $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n+1}{3^n+1}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Zadanie 10 — Skorzystaj z kryterium zagęszczenia do zbadania zbieżności szeregów

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$
2.

Zadanie 11 — Wyznacz promienie zbieżności następujących szeregów potęgowych:

1. $\sum\limits_{n} \frac{1}{n+2}x^n$
2. $\sum\limits_{n} \frac{1}{\sqrt{n}}x^n$
3. $\sum\limits_{n} \frac{(-1)^n}{n}x^n$
4. $\sum\limits_{n} n2^n x^n$
5. $\sum\limits_{n} \frac{1}{n^n}x^n$
6. $\sum\limits_{n} \frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$ (dla ustalonego naturalnego $k > 0$)

Zadanie 12 — Rozwiń następujące funkcje w szereg Maclaurina i wyznacz ich promienie zbieżności:

1. $f(x) = \sin(x)$
2. $g(x) = \cos(x)$
3. $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$
4. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

Zadanie 13 — Załóżmy, że szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżności R. Niech $g \in \mathbb{R}$.

1. Jaki jest promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}(g \cdot a_n)x^n$?
2. Jaki jest promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}(g^n \cdot a_n)x^n$?

Zadanie 14 — Pokaż, że

1. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$,
2. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$,
3. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n$ dla $|x| < 1$.
4. $\ln \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$ dla $|x| < 1$.

3 Przestrzeń euklidesowa

Zadanie 15 — Pokaż, że $(x, y) \perp (-y, x)$.

Zadanie 16 — Niech $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pokaż, że $||\frac{x}{||x||}|| = 1$.

Zadanie 17 — Skorzystaj z nierówności Cauchy'ego do pokazania, że dla dowolnych $a, b, t \in \mathbb{R}$ mamy

$$|a\cos(t) + b\sin(t)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Zadanie 18 — Niech $d(x, y)$ oznacza odległość euklidesową w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Narysuj następujące podzbiory płaszczyzny:

1. $A = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, (1, 1)) < 1\}$
2. $A = \{P \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < d(P, (2, 1)) < 1\}$
3. $A = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, (2, 0) = d(P, (0, 1)\}$

Zadanie 19 — Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \left(\frac{n}{2n+1}, \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n, \sqrt[n]{n+1}\right)$$

punktów przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 20 — Wyznacz punkty skupienia ciągu

$$a_n = \left((-1)^n \frac{n}{n+1}, \frac{\log_2(2^n+1)}{n}, \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n \right)$$

* **Zadanie 21 —** Niech $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ oraz $a_n = f\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$. Wyznacz punkty skupienia tego ciągu.

Zadanie 22 — Reguła równoległoboku: Pokaż, że

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

Zadanie 23 — Wyznacz wnętrza, domknięcia, wnętrza domknięć i domknięcia wnętrz następujących podzbiorów prostej rzeczywistej:

1. $A_1 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $A_2 = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.
2. $B_1 = \mathbb{N}$, $B2 = \mathbb{Z}$
3. $C = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
4. $D = [0,1] \cup (2,3) \cup ([4,5] \cap \mathbb{Q})$
5. $E = \emptyset$, $F = \mathbb{R}$.

Zadanie 24 — Wyznacz wnętrza i domknięcia następujących podzbiorów $\mathbb{R}^2$:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

Zadanie 25 — Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Kulą otwartą o środku w punkcie $x \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywam zbiór

$$K(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\} .$$

1. Pokaż, że $K(x,r)$ jest zbiorem otwartym.
2. Niech $a, b \in X$, $r_1, r_2 > 0$. Pokaż, że jeśli $d(a,b) > r_1 + r_2$ to $K(a,r_1) \cap K(b,r_2) = \emptyset$.

Zadanie 26 — Rozważamy przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z odległością euklidesową. Niech $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $r > 0$.

1. Wyznacz $cl(K(x,r))$.
2. Niech $a \in \mathbb{R}^n$. Rozważamy zbiór $K(x,r) + a = \{y + a : y \in K(x,r)\}$. Pokaż, że $K(x,r) + a = K(x+a, r)$.

Zadanie 27 — Pokaż, że suma i przekrój dwóch podzbiorów otwartych dowolnej przestrzeni metrycznej jest zbiorem otwartym. Pokaż, że suma i przekrój dwóch podzbiorów domkniętych dowolnej przestrzeni metrycznej jest zbiorem domkniętym.

1. Czy suma dowolnej rodziny podzbiorów domkniętych $\mathbb{R}$ jest zbiorem domkniętym?
2. Czy przekrój dowolnej rodziny podzbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym?

Zadanie 28 — Załóżmy, że $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są zbiorami otwartymi.

1. Pokaż, że $A \times B$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^2$.
2. Pokaż, że jeśli $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są zbiorami domkniętymi, to $A \times B$ jest podzbiorem domkniętym przestrzeni $\mathbb{R}^2$.
3. Samodzielnie uogólnij to zadanie na podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$.

Zadanie 29 — Niech (X,d) będzie dowolną przestrzenią metryczną. Załóżmy, że $A \subseteq X$ jest takim zbiorem, że

$$(\forall a \in A)(\exists r > 0)(K(a,r) \cap A = \{a\})$$

Pokaż, że A jest zbiorem domkniętym.

Zadanie 30 — Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Niech $F : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą.

1. Pokaż, że zbiór $\{x \in X : F(x) = 0\}$ jest zbiorem domkniętym.
2. Pokaż, że zbiór $\{x \in X : F(x) \geq 0\}$ jest zbiorem domkniętym.
3. Pokaż, że zbiór $\{x \in X : F(x) > 0\}$ jest zbiorem otwartym.
4. Uogólnij to zadanie na dowolne przestrzenie metryczne

Zadanie 31 — Pokaż, że zbiór $\{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ jest zbiorem domkniętym przestrzeni $\mathbb{R}^2$.
Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania. Przyjrzy się funkcji $F(x, y) = x \cdot y$.

Zadanie 32 — Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją ciągłą. Pokaż, że $\{(x, F(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Zadanie 33 — Niech (X, d), (Y, ρ), (Z, η) będą przestrzeniami metrycznymi. Załóżmy, że funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła w punkcie $a \in X$ oraz, że funkcja $g : Y \to Z$ jest ciągła w punkcie $f(a)$. Pokaż, że funkcja $g \circ f : X \to Z$ jest ciągła w punkcie a.

Zadanie 34 — Załóżmy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest łukowo spójny. Niech $f : A \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. Załóżmy, że $a, b \in A$ oraz $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Pokaż, że istnieje $c \in A$ takie, że $f(c) = 0$.

Zadanie 35 — Niech $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ będzie (ciągłą) krzywą taką, że $||\gamma(0)|| < 1$ oraz $||\gamma(1)|| > 1$. Pokaż, że $gamma$ przecina sferę jednostkową.

* **Zadanie 36 —** Niech f będzie funkcją ciągła na sferze jednostkowej $S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Pokaż, że istnieje punkt $x \in S_2$ taki, że $f(x) = f(-x)$.

4 Funkcje rzeczywiste wielu zmiennych rzeczywistych

Zadanie 37 — Wpisz w pasku wyszukiwarki Google wzory

1. x∧2+y∧2,
2. x∧2-y∧2,
3. x*y,
4. sin(x+y),
5. sin(x-y∧2),
6. 1/(x∧2+y∧2)
7. 1/(x∧2-y∧2)
8. 5 + (-sqrt(1-x∧2-(y-abs(x))∧2))*cos(30*((1-x∧2-(y-abs(x))∧2))), x is from -1 to 1, y is from -1 to 1.5, z is from 1 to 6

Postaraj się zrozumieć te wykresy (poza ostatnim). **Uwaga:** Musisz mieć stosunkowo nową kartę graficzną aby móc wygenerować te wykresy.

Zadanie 38 — Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & : x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pokaż, że dla każdego $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ istnieje taki ciąg punktów $P_n = (x_n, y_n)$ zbieżny do punktu $(0, 0)$ taki, że $\lim_n f(x_n, y_n) = a$.

Zadanie 39 — Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & : x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Pokaż, że dla dowolnego wektora $(a, b) \neq (0, 0)$ mamy $\lim_{t \to 0} f(ta, tb) = 0$
2. Znajdź taki ciąg punktów $P_n = (x_n, y_n)$ zbieżny do punktu $(0, 0)$, że $\lim_n f(x_n, y_n) = 1$.

Zadanie 40 — Niech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x} & : x\neq 0\\ 0 & : x\end{cases}$$

1. Pokaż, że f jest ciągła w punkcie $(0,0)$
2. Pokaż, że f jest ciągła w każdym punkcie płaszczyzny

4.1 Różniczkowanie

Zadanie 41 — Wyznacz pochodne cząstkowe następujących funkcji
1. $f(x,y)=x^2(x+y)^3$
2. $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$
3. $f(x,y)=xy\cos(x-y)$
4. $f(x,y,z)=xy^2z^3+xe^{y+z}$
5. $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
6. $f(x,y,z)=xy+yz+zx$
7. $f(x,y,z)=y(y-z)^x$ określonej na zbiorze otwartym $U=\{(x,y,z):y-z>0\}$
8. $f(x,y,z)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

Posłuż się wyszukiwarką Google do wyznaczenia wykresów pierwszych trzech funkcji

Zadanie 42 — Niech $r>0$ oraz $f(t)=(r\cos(t),r\sin(t))$.
1. Wyznacz jakobian $f'(t)$ funkcji f w punkcie t.
2. Pokaż, że $\langle f(t),f'(t)\rangle=0$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$.
3. Ustalmy $t\in\mathbb{R}$. Napisz równanie prostej stycznej do krzywej f w punkcie $f(t)$.
4. Podaj wzór na pochodną $(Df)(t)$ w punkcie t.

Zadanie 43 — Wyznacz jakobiany $f'(t)$ następujących funkcji
1. $f(t)=(t^2,t^3+t,\cos(t^2))$
2. $f(t)=(t,t^2,t^3)$

Zadanie 44 — Niech $f(t)=(v_x\cdot t,-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2+v_y\cdot t)$ dla pewnych stałych $v_x,v_y,g>0$.
1. Oblicz $f'(t)$ oraz $f''(t)$.
2. Podaj interpretacją fizyczną tego zadania.
3. Niech $(x_x,v_y)=v(\cos(\alpha),\sin(\alpha))$ $(\alpha\in(0,\pi/2))$. Znajdź $t_\alpha>0$ takie, że $f(t_\alpha)=(x_\alpha,0)$ dla pewnego $x_\alpha>0$. Wyznacz x_α. Znajdź kąt α maksymalizujący liczbę x_α.

Zadanie 45 — Załóżmy, że $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ jest funkcją różniczkowalną, taką, że $(\forall t)(||f(t)||=1)$
1. Pokaż, że $(\forall t\in\mathbb{R})(f'(t)\perp f(t))$.
2. Podaj interpretację fizyczną tego faktu.
   Wskazówka: Zapisz funkcję f w postaci $f(t)=(f_1(t),\ldots,f_n(t))$ i następnie zauważ, że $(f_1(t))^2+\ldots+(f_n(t))^2=1$ dla każdego t.

Zadanie 46 — (Numeryczna metoda Verleta) Niech $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ będzie polem wektorowym. Niech $X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ będzie łukiem takim, że
$$\frac{\partial^2X(t)}{\partial^2t}=F(X(t))$$
dla każdego $t\in\mathbb{R}$.
1. Zastosuj wzór Taylora rzędu 4 do wyznaczania $X(t+h)$ oraz $X(t-h)$.
2. Dodaj stronami wyprowadzone wzory do pokazania, że
$$X(t+h)=2X(t)-X(t-h)+F(X(t))\cdot h^2+O(h^4)$$

3. Niech $F(x,y) = -(x,y)/(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$. Pokaż, że dla każdego $(x,y) \neq (0,0)$ mamy
$$||F(x,y)|| = \frac{1}{||(x,y)||^2} \, .$$

4. Użyj obserwacje z poprzednich punktów do napisania w dowolnym języku programowania symulatora poruszania się cząstki punktowej w polu centralnym $F(x,y)$ z poprzedniego punktu. Ustaw parametry początkowe $X(0) = (1,0)$, $\frac{\partial X(0)}{\partial t} = (0, 0.5)$. Weź $h = 0.001$. Wyznacz przybliżone położenia punktów $X(kh)$ dla $k = 0, \ldots, 3000$. Zapisz wyniki do pliku tekstowego. Wczytaj je do programu Excel (lub jego odpowiednika) i wyświetl przybliżoną trajektorię ruchu cząstki.

Zadanie 47 — Wyznacz gradienty następujących funkcji

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$
2. $f(x,y,z) = xy^2z^3$
3. $f(x,y,z) = xyz$
4. $f(x,y,z) = 1 + x^2 + 3xy + x^2z$
5. $f(x,y,z) = (xy)^z$

Zadanie 48 — Wyznacz gradienty następujących funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

1. $f(x) = \langle a, x \rangle$
2. $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k (x_k)^2$
3. $f(x) = \frac{1}{||x||}$ $(x \neq 0)$

Zadanie 49 — Wyznacz pochodne kierunkowe następujących funkcji w zadanych punktach P i kierunkach a:

1. $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3, \quad P = (1,2,1); \quad a = [1,1,1]$
2. $f(x,y,z) = xyz, \quad P = (1,-1,1), \quad a = [2,1,2]$
3. $f(x,y,z) = x\cos(yz), \quad P = (0,0,0), \quad a = [1,1,1]$

Zadanie 50 — Wyznacz jakobiany następujących funkcji:

1. $f(x,y) = \begin{bmatrix} x+y^2 \\ x+y \end{bmatrix}$
2. $f(x,y) = \begin{bmatrix} xy \\ \sin(x+y) \\ e^x y \end{bmatrix}$
3. $f(x,y,z) = \begin{bmatrix} xyz \\ \sin(x+yz) \end{bmatrix}$

Zadanie 51 — Wyznacz pochodne wszystkie cząstkowe drugiego stopnia wszystkich funkcji z Zadania 41 oraz wyznacz ich Hesjany.

Zadanie 52 — Pokaż, że funkcja $f(x) = ||x||$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ oraz znajdź jej pochodną.

Zadanie 53 — Wyznacz macierz Jacobiego funkcji $f(r,t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ oraz $f(r,t,h) = (r\cos(t), r\sin(t), h)$.

Zadanie 54 — Zbadaj ekstrema podanych funkcji:

1. $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + 4xy + y^4 - 2y^2$
2. $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
3. $f(x,y) = x^2y^2(-x-y+5)$
4. $f(x,y) = xy^2(-x-y+4)$
5. $f(x,y) = \cos(x-y) + \sin(x) + \cos(y)$
6. $f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$

Zadanie 55 — Niech $f(x,y) = (x \cdot y, x+y)$ oraz $g(x,y) = (e^x, x \cdot y)$

1. Wyznacz złożenie $g \circ f$

2. Oblicz macierze Jacobiego f', g' oraz $(g \circ f)'$
3. Wyznacz $g'(f(x, y))$
4. Oblicz $g'(f(x, y)) \circ f'(x, y)$.

* **Zadanie 56 —** Ile jest pochodnych cząstkowych m-tego rzędu nieskończenie różniczkowalnej funkcji 3 zmiennych? funkcji m zmiennych?

Zadanie 57 — Znajdź wymiary otwartego zbiornika prostopadłościennego o objętości 4 m^3 o najmniejsze powierzchni bocznej.

Zadanie 58 — Niech $g(x, y, z) = x \cdot y + z$, $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$ i $z(t) = t^2$. Oblicz $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t))$.

Zadanie 59 — Niech $g(x, y, z, u) = e^x \cdot y \cdot z$, $x(t) = t^2$, $y(t) = 1 + t$, $z(t) = \frac{1}{t}$, $u(t) = \ln(t)$. Oblicz $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t), y(t))$.

Zadanie 60 — Niech u będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną. Niech $f(t, x) = u(v \cdot t - x)$. Pokaż, że funkcja f spełnia równanie różniczkowe

$$\partial_t^2 f = v^2 \partial_x^2 f \ .$$

Uwaga: To jest jednowymiarowe równanie fali.

Zadanie 61 — Niech $T(t, x) = e^{-a^2 t} \sin(ax)$. Pokaż, że funkcja f spełnia równanie różniczkowe

$$\partial_t T = \partial_x^2 T \ .$$

Uwaga: To jest jednowymiarowe równanie ciepła.

Zadanie 62 — Niech $f(x, y, z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Pokaż, że funkcja f spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$\partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f = 0$$

Uwaga: To jest tak zwane równanie Laplace'a.

Zadanie 63 — Oblicz $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dl}$ dla następujących pól wektorowych oraz krzywej $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$:

1. $F(x, y) = (x, y)$, $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$
2. $F(x, y) = (-x, -y)$, $\gamma(t) = (t, a \cdot t + b)$, $t \in [0, 1]$
3. $F(x, y) = (-x, -y)$, $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
4. $F(x, y) = (y, -x)$, $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$

Zadanie 64 — Niech $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\delta : [b, c] \to \mathbb{R}^n$ będą klasy C^1 i $\gamma(b) = \delta(b)$. Definiujemy krzywą $\rho : [a, c] \to \mathbb{R}^n$ wzorem

$$\rho(t) = \begin{cases} \gamma(t) & : t \in [a, b] \\ \delta(t) & : t \in [b, c] \end{cases}$$

1. Pokaż, że $\int_\rho \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dl} + \int_\delta \vec{F} \cdot \vec{dl}$.
   Uwaga: Krzywą ρ nazywamy sumą krzywych γ i δ i oznaczamy przez $\gamma+\delta$. Wynik zadania można zapisać następująco
   $$\int\limits_{\gamma+\delta} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dl} + \int\limits_{\delta} \vec{F} \cdot \vec{dl} \ .$$
   .
2. Podaj interpretację fizyczną tego zadania.

Zadanie 65 — Niech $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Definiujemy krzywą $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ wzorem $\delta(t) = \gamma((a + b) - t)$. Krzywą tę oznaczamy przez $-\gamma$.

1. Pokaż, że $\int\limits_{-\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dl} = -\int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dl}$.
2. Pokaż interpretację fizyczną tego zadania.

Zadanie 66 — Niech $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będą polami wektorowymi, $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\gamma : [u, v] \to \mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\int\limits_{\gamma} \overrightarrow{aF + bG} \cdot \vec{dl} = a \int\limits_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dl} + b \int\limits_{\gamma} \vec{G} \cdot \vec{dl}$$

Zadanie 67 — Czy pole wektorowe $F(x, y) = (-y, x)$ jest polem potencjalnym?

Zadanie 68 — Niech $f(x, y)$ będzie funkcją dwóch zmiennych. Załóżmy, że $\frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$ są funkcjami ciągłymi. Pokaż, że

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy$$

Zadanie 69 — Niech

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & : t > 0 \\ 0 & : t \leq o \end{cases}$$

1. Pokaż, że funkcja f jest klasy C^∞ oraz, że dla każdego k mamy $f^{(k)}(0) = 0$
2. Niech $g(t) = f(1 - t)$. Naszkicuj wykresy funkcji f, g oraz fg.
3. Niech $u(t) = f(t)g(1 - t)$. Pokaż, że u jest funkcją klasy C^∞ oraz, że $u(t) > 0 \longleftrightarrow t \in (0, 1)$.
4. Dla $n > 0$ określamy $u_n(t) = u(n \cdot t)$. Wyznacz nośnik funkcji u_n, czyli zbiór $supp(u_n) = \{t \in \mathbb{R} : u_n(t) > 0\}$.
5. Niech $u_{n,a}(t) = u_n(t + a)$. Pokaż, że dla dowolnego zbioru otwartego $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz dowolnego $b \in A$ istnieją liczby $n > 0$ oraz a takie, że $b \in supp(u_{n,a}) \subseteq A$.

Zadanie 70 — Wyznacz równanie stycznej do hiperboli zadanej równaniem $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ w punkcie (x_0, y_0) (leżącym na tej hiperboli).

Zadanie 71 — Wyznacz ekstrema warunkowe funkcji $f(x, y)$ przy warunku $g(x, y) = 0$ dla następujących funkcji

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = xy - 1$
2. $f(x, y) = x^3 + y^3$, $g(x, y) = x + y - 2$
3. $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = e^{x+y} - xy - 1$
4. $f(x, y) = x^a y^b$, $g(x, y) = x + y - 1$ (a, b są ustalonymi liczbami dodatnimi).

Zadanie 72 — Niech $P = (0, b)$. Zastosuj metodę mnożników Lagrange'a do wyznaczania punktu na krzywej zadanej równaniem $y = x^2$ leżącego najbliżej punktu P.

Zadanie 73 — Zastosuj równanie Eulera-Lagrange'a do pokazania, że najkrótszą krzywą łączącą dwa punkty płaszczyzny jest odcinek.

5 Całki wielokrotne

Zadanie 74 — Oblicz następujące całki podwójne:

1. $\int_1^4 dx \int_2^4 xy dy$
2. $\int_0^a dx \int_0^b xy(x - y) dy$
3. $\int_{x=1}^{x=2} \int_{y=1}^{y=3} (x + xy) dx dy$
4. $\iint_P (x^2 y + 2xy^3) dx dy$, gdzie $P = [1, 2] \times [2, 4]$
5. $\iint_P x \sin(xy) dx dy$. gdzie $P = [0, 1] \times [\pi, 2\pi]$
6. $\int_0^1 \int_0^1 |x - y| dx dy$
7. $\iint_A e^{\frac{x}{y}} dx dy$, gdzie $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$

Zadanie 75 — Oblicz całkę $\iint_P \sin(x)\cos(y)dxdy$, gdzie obszarem całkowania jest trójkąt o wierzchołkach $P = (0,0)$, $Q = (0, \pi/2)$ i $R = (\pi/2, 0)$.

Zadanie 76 — Oblicz następujące całki po obszarach ograniczonych wskazanymi krzywymi:

1. $\iint_D xy^2 dxdy$, D: $y = x$, $y = 2 - x^2$
2. $\iint_A e^{\frac{x}{y}} dxdy$, D: $x = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = 1$
3. $\iint_B e^{x^2} dxdy$, D: $x = 0$, $x = \ln(\sqrt{2})$, $y = 0$ $y = 2x$

Zadanie 77 — Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sin(y) \wedge 0 \leq y \leq \pi\}$.

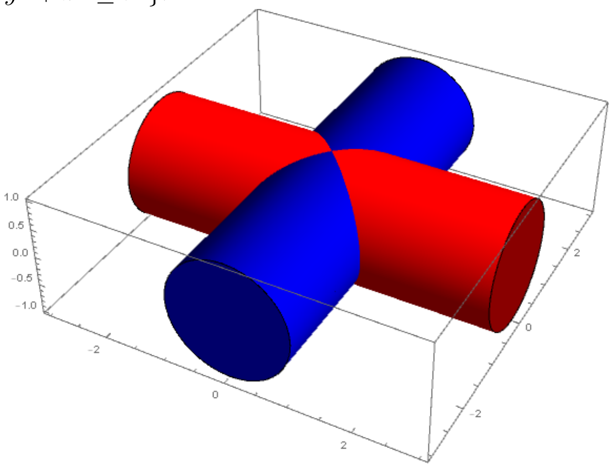
1. Oblicz powierzchnię zbioru A
2. Oblicz $\iint_A xdxdy$
3. Oblicz $\iint_A ydxdy$
4. Oblicz $\iint_A xydxdy$

Zadanie 78 — Prostopadłościan o podstawie $P = [0,a] \times [0,b]$ położonej w płaszczyźnie 0XY został ścięty od góry powierzchnią $z = x^2 + y^2$. Oblicz objętość tak powstałej bryły.

Zadanie 79 — Pokaż, że $\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d g(y)dy\right)$.

Zadanie 80 — Oblicz $\int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x)\sin(y)dxdy$.

Zadanie 81 — Oblicz objętość przekroju dwóch walców $V_1 = \{(x,y,z) : x^2 + z^2 \leq r^2\}$ oraz $V_2 = \{(x,y,z) : y^2 + z^2 \leq r^2\}$.



Zadanie 82 — Znajdź objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

1. $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, $y = 1$, $z = 0$
2. $z^2 = xy$, $x + y = 2$, $x + y = 4$
3. $z = x^2 + y^2$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$

Zadanie 83 — Oblicz następujące całki potrójne:

1. $\int_{x=0}^{1} \int_{y=1}^{2} \int_{z=2}^{2} (1 + x + xy)dxdydz$
2. $\iiint_P (xyz)dxdydz$, gdzie $P = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$
3. $\iiint_P (x + y + z)dxdydz$, gdzie $P = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$

Zadanie 84 — Wyznacz masę prostopadłościanu $P = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$ wiedząc, że gęstość masy w punkcie (x,y,z) wyraża się wzorem $\rho(x,y,z) = 1 + x + y + z$.

Zadanie 85 — Niech $\Sigma_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1, \ldots x_n \wedge x_1 + \ldots + x_n \leq 1\}$. Wyznacz $\int_{\Sigma_n} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. Wskazówka: Rozwiąż to zadanie dla n=1, n=2 i n=3 i spróbuj na postawie tych wyników postawić ogólna hipotezę.

Zadanie 86 — Oblicz wartość średnią funkcji $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$ na obszarze $[0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Zadanie 87 — Niech $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Wyznacz całki $I_n = \iint_{[0,1]^n}(x_1 + \ldots + x_n)dx_1 \cdots dx_n$.

Zadanie 88 — Wyprowadź za pomocą twierdzenia Fubbiniego wzór na objętość bryły obrotowej

$$V = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b \wedge y^2 + z^2 \leq f(x)^2\},$$

któy poznaliśmy na pierwszym semestrze.

5.1 Zamiana zmiennych

Zadanie 89 — Niech $\Phi_b(x, y) = (x + by, y)$.

1. Niech $a, h > 0$ oraz $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq h - \frac{h}{a}x\}$. Naszkicuj obszar T. Jaka jest jego powierzchnia?
2. Wyznacz Jakobian funkcji Φ_b.
3. Pokaż, że dla dowolnej figury $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mamy $\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(\Phi_b[A])$.
4. Wyznacz obraz $\Phi_b[T]$.
5. Jakie jest pole figury $\Phi_b[T]$?

Zadanie 90 — Niech

$$O_\phi(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(to jest obrót płaszczyzny względem środka układu współrzędnych o kąt ϕ. Pokaż, że dla dowolnej figury A mamy $pow(A) = pow(O_\phi(A))$.

Zadanie 91 — Pokaż, że jeśli $T_{\vec{v}}$ jest przesunięciem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o wektor $\vec{v}$, to dla dowolnej n-wymiarowej bryły A mamy $\lambda^n(A) = \lambda^n(T_{\vec{v}}(A))$.

Zadanie 92 — Pokaż, że objętość elipsoidy zadanej równaniem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} \leq 1$ wyraża się wzorem $\frac{4}{3}\pi abc$. Wskazówka: Rozważ odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$ zadane wzorem $\Psi(x, y, z) = (ax, by, cz)$.

Zadanie 93 — Niech T będzie niezdegenerowanym trójkątem na płaszczyźnie o wierzchołkach $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ i $C = (c_1, c_2)$. Załóżmy, że wszystkie współrzędne $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ są liczbami całkowitymi. Pokaż, że $\mathrm{pow}(T) \geq \frac{1}{2}$. Wskazówka: Zapisz powierzchnię trójkąta T za pomocą pewnego wyznacznika.

Zadanie 94 — Oblicz następujące całki po wskazanych obszarach:

1. $\iint_K \sin(x^2 + y^2)dxdy, \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \pi\}$,
2. $\iint_D (2 \cdot x \cdot y)dxdy, \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \wedge 2^2 \leq x^2 + y^2 \leq 5^2\}$,
3. $\iint_K e^{-(x^2+y^2)}dxdy, \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
4. $\iint_R x^2 dxdy, \quad R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \wedge 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Zadanie 95 — Znajdź powierzchnię obszaru R ograniczonego przez krzywe $r = 2+\sin(3\theta)$ and $r = 4-\cos(3\theta)$.

Zadanie 96 — Oblicz następujące całki po wskazanych bryłach:

1. $\iiint_K (10 - x^2 - y^2 - z^2)dzdydz, \quad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
2. $\iiint 1_V dxdydz, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Zadanie 97 — Niech V będzie bryłą która powstała z usunięcia z połowy kuli $K = \{(x, r, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq 0\}$ kuli $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$ (czyli $V = K \setminus A$). Oblicz objętość V. Wskazówka: Pokaż najpierw, że równanie $r = 2\cos(\theta)$ (we współrzędnych sferycznych) wyznacza brzeg kuli A: ze wzoru $r = 2\cos(\theta)$ wywnioskuj, że $r^2 = 2z$, czyli, że $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

Zadanie 98 — Niech L będzie „stożkiem lodów" ograniczonym z dołu przez powierzchnię $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ oraz z góry przez powierzchnię $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Wyznacz objętość bryły L.

Zadanie 99 — Zastosuj współrzędne cylindryczne do wyprowadzenia wzoru na objętość walca o promieniu podstawy r i wysokości h.

Zadanie 100 — Zastosuj współrzędne cylindryczne do wyprowadzenia wzoru na objętość stożka o promieniu podstawy r i wysokości h.

Zadanie 101 — Załóżmy, że $\sigma > 0$. Oblicz następujące całki:

1. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$
2. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$
3. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$

Zadanie 102 — Na wykładzie pokazaliśmy, że n-wymiarowa objętość n-wymiarowej kuli o promieniu R wyraża się wzorem $a_n R^n$, gdzie liczby a_n spełniają następującą rekurencyjną zależność $a_{n+2} = \frac{2\pi}{n+2} a_n$.

1. Stosując ten wzór wyznacz objętości n-wymiarowych kul o promieniu R dla wszystkich $n \in \{1, 2, \ldots, 20\}$. Narysuj wykres ilustrujący te obliczenia.
2. Dla jakiego k parametr α_k jest największy?

Zadanie 103 — Niech $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Niech $\cdot$ oznacza iloczyn skalarny. Pokaż, że

$$\frac{d}{dt}(F(t) \cdot G(t)) = (\frac{d}{dt}F(t)) \cdot G(t)) + F(t) \cdot (\frac{d}{dt}G(t))$$

Zadanie 104 — Niech $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Niech $\times$ oznacza iloczyn wektorowy. Pokaż, że

$$\frac{d}{dt}(F(t) \times G(t)) = (\frac{d}{dt}F(t)) \times G(t)) + F(t) \times (\frac{d}{dt}G(t))$$

6 Formy różniczkowe

Zadanie 105 — Doprowadź do kanonicznej postaci następujące formy:

1. $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{ij} dx_i \wedge dx_j$.
2. $(A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz) \wedge (B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz)$

Zadanie 106 — Niech $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Wyznacz $d\pi_i$.

Zadanie 107 — Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$.

1. Oblicz $\int_\gamma f dx$.
2. Oblicz $\int_\gamma df$.

Zadanie 108 — Niech $\phi(u, v) = (1 + u)[\cos(2\pi v), \sin(2\pi v)]$ dla $(u, v) \in [0, 1]^2$. Wyznacz $\partial\phi$.

Zadanie 109 — Niech $\phi(u, v) = (u, v)$, $\psi(u, v) = (u, v + 1)$ i $\eta(u, v) = (u, 2v)$ dla $(u, v) \in [0, 1]^2$. Niech $\rho = 1\phi + 1\psi$. Pokaż, że $\partial\rho = \eta$.

Zadanie 110 — Niech $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Pokaż, że $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$.

Zadanie 111 — Pokaż, że jeśli forma ω jest stopnia nieparzystego, to $\omega \wedge \omega = 0$.

Zadanie 112 — Znajdź przykład formy ω takiej, że $\omega \wedge \omega \neq 0$.

Zadanie 113 — Sprowadź formę

$$(a(x, y, z)dx \wedge dy + b(x, y, z)dx \wedge dz) \wedge (c(x, y, z)dx \wedge dy + d(x, y, z)dy \wedge dz)$$

do postaci kanonicznej.

Zadanie 114 — Niech $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ będzie formą określoną na zbiorze otwartym $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Pokaż, że ω jest formą zupełną.
2. Niech $\gamma(u) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u)$. Oblicz $\int_\gamma \omega$.
3. Wywnioskuj z tego, że ω nie jest formą dokładną.
4. Z jakim polem wektorowym jest związana forma ω.

Zadanie 115 — Ustalmy liczby $k \leq n$. Rozważmy wszystkie formy postaci $dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k}$ dla dowolnych ciągów $(i_1, \ldots i_k)$ elementów zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Ile jest istotnie różnych form tej postaci?

Zadanie 116 — Niech $F(x,y) = (x^2, 0)$ oraz $S = [-1,1]^2$. Oblicz $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

c.d.n.
Powodzenia,
Jacek Cichoń