Analiza Matematyczna I

I termin

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska
WPPT

5 lutego 2019

To są zadania z egzaminu który odbył się 31.01.2019. Poniżej zadań znajdują się komentarze i szkice rozwiązań.

Zadanie 1

Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}} = \sqrt[n]{\frac{3^n((\frac{2}{3})^n+1)}{5^n((\frac{4}{5})^n+1)}} = \frac{3}{5}\sqrt[n]{\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{(\frac{4}{5})^n+1}}\ .$$

Jeśli $0 \leqslant a \leqslant 1$, to $1 \leqslant \sqrt[n]{1+a^n} \leqslant \sqrt[n]{1+1} = \sqrt[n]{2}$, więc z Twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim_n a_n = 1$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}} = \frac{3}{5}.$$

Zadanie 2

Wariant 0. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{x^2-x-4}{2-x}$.
Komentarz: Tu nie było żadnych niespodzianek. Korzystając z pomocy Wolfram Alpha można było sprawdzić wszystkie kroki swoich obliczeń, włącznie z asymptota ukośną y = -x-3.

Zadanie 3

Niech

$$f(x) = \begin{cases} x\ln\frac{1}{x} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

Czy funkcja f jest ciągła? Wyznacz $\sup\{f(x) : x \in [0, \infty)\}$.
Rozwiązanie. Funkcja f jest ciągła w każdym punkcie półprostej $(0, \infty)$ (bo złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe. Następnie, korzystając z reguły de l'Hospitala, mamy

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} =^H \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} x = 0 \ ,$$

wiec f jest ciągła w punkcie 0. Zatem f jest ciągła na całej swojej dziedzinie $[0, \infty)$.

Dla $x > 0$ mamy

$$f'(x) = \ln(\frac{1}{x}) - 1.$$

Zatem $x \in (0, \frac{1}{e}) \to f'(x) > 0$, $f'(\frac{1}{e}) = 0$ oraz $x \in (\frac{1}{e}, \infty) \to f'(x) < 0$. Tak więc funkcja f rośnie na odcinku $(0, \frac{1}{e})$, maleje na półprostej $(\frac{1}{e}, \infty)$ a w punkcie $x = \frac{1}{e}$ przyjmuje wartość największą. Tak więc

$$\sup\{f(x) : x \in [0, \infty)\} = f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} \ .$$

Zadanie 4

Niech $A = \{(x, y) : x \in [-1, 1] \wedge xe^{x^2} \leqslant y \leqslant 1\}$. Oblicz pole obszaru A.
Rozwiązanie: Niech $f(x) = xe^{x^2}$. Ponieważ $f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$, więc funkcja f jest rosnąca. Ponadto $f(0) = 0$ oraz $f(1) = e > 1$. Jest więc dokładnie jedna $\alpha \in (0, 1)$ taka, że $f(\alpha) = 1$. Pole obszaru A jest równe

$$S = \int_{-1}^{\alpha} (1 - f(x))dx = (1 + \alpha) - \int_{-1}^{\alpha} f(x)dx$$

Ponieważ $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, więc $\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx = \frac{1}{2}(e^{\alpha^2} - e)$. Zatem

$$S = 1 + \alpha + \frac{1}{2}(e - e^{\alpha^2}) \ .$$

Korzystając z tego, że $\alpha e^{\alpha^2} = 1$ mamy $e^{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$. Zatem

$$S = 1 + \alpha + \frac{1}{2}(e - \frac{1}{\alpha}) \ .$$

Uwaga. Za doprowadzenie do tego miejsca dostawało się 5 pkt. Można podjąć się również próby oszacowania liczby α (kilku z Was to zrobiło !!!). Korzystając z serwisu Wolfaram Alpha znajdujemy $\alpha \approx 0.653$. A z tego otrzymujemy przybliżenie $A \approx 2.25$.

Zadanie 5

Niech $F(x) = \int_x^{2x} e^{t^2} dt$. Oblicz $F'(x)$.
Rozwiązanie. Niech $H(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Wtedy $H'(x) = e^{x^2}$ oraz $F(x) = H(2x) - H(x)$. Zatem

$$F'(x) = H'(2x)(2x)' - H'(x) = 2e^{4x^2} - e^{x^2} \ .$$

Zadanie 6

Załóżmy, że A jest zbiorem zwartym oraz, że D jest zbiorem domkniętym. Pokaż, że zbiór $A \cap D$ jest zwarty.
Rozwiązanie. Niech (a_n) będzie ciągiem elementów zbioru $A \cap D$. Wtedy jest on również ciągiem elementów zbioru A. Zawiera więc podciąg (a_{n_k}) zbieżny do jakiegoś punktu $g \in A$. Ciąg (a_{n_k}) jest również ciągiem elemntów zbioru D. Lecz D jest domknięty, więc $g \in D$. Zatem $g \in A \cap D$.
Uwaga Część z Was rozwiązało to zadanie korzystając z charakteryzacji zwartych podzbiorów $\mathbb{R}^n$: A jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem domkniętym i ograniczonym. To rozwiązanie jest trochę mniej ogólne niż pokazane wyżej, ale za to rozwiązanie też otrzymało się 5 pkt.