Logika i Struktury Formalne

I termin

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska
WPPT

3 lutego 2019

To są zadania z egzaminu który odbył się 01.02.2018. Poniżej zadań znajdują się komentarze i szkice rozwiązań.

Zadanie 1

Czy $\{p \to q, p \land \neg r, s \lor r\} \models s \land q$?

Rozwiązanie. Zadanie to można rozwiązać za pomocą tabelki zero - jedynkowej. Za takie rozwiązanie można było dostać 3 pkt - jeśli było całkowicie poprawne. Tej heroicznej próby podjęła się mniej więcej połowa z Was, z czego więcej niż połowa zrobiła błędy (no i dostała 0 pkt).
Oto krótsze rozwiązanie:
Rozważmy waluację π dla której wszystkie zdania ze zbioru założeń są prawdziwe. Wtedy $\pi(p) = 1$ oraz $\pi(\neg r) = 1$, więc $\pi(r) = 0$. Ponieważ $\pi(p \to q) = 1$ oraz $\pi(p) = 1$, więc również $\pi(q) = 1$. Ponieważ $\pi(s \lor r) = 1$ a $\pi(r) = 0$, więc $\pi(s) = 1$. Zatem $\pi(s \land q) = 1$.

Zadanie 2

Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ i $X = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$. Ile podzbiorów zbioru X można zdefiniować ze zbiorów A i B za pomocą operacji $\cap$, $\cup$ oraz ^{c}?
Rozwiązanie Zauważamy, że $A \subset B \subset X$. Rodzina $\mathcal{A} = \{A, B\}$ posiada tylko trzy niepuste składowe (wykład z dnia 11.10.2018)- są to zbiory $A \cap B$, $A^c \cap B$ oraz $A^c \cap B^c$. Z trzech niepustych składowych za pomocą operacji sumy można zdefiniować $2^3 = 8$ różnych zbiorów. Rodzina ta jest zamknięta na sumy, iloczyny i dopełnienia. Tak więc ze zbiorów A, B można wydefiniować za pomocą $\cap$, $\cup$ i ^{c} 8 różnych zbiorów.

Zadanie 3

Niech $Z = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : (\forall n)(x_{n+3} = (x_{n+2} + x_{n+1} + x_n) \bmod 2)\}$.

1. Oblicz $|Z|$.
2. Oblicz $|\{x \restriction \{3,4,5,\ldots\} : x \in Z\}|$?

Rozwiązanie. Każdy ciąg spełniający równanie $x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n$ jest jednoznacznie wyznaczony przez (x_0, x_1, x_2). Zatem $|Z| = |\{0,1\}^3| = 2^3 = 8$.

Zauważmy, że (liczymy modulo 2) jeśli ciąg (x_n) spełnia rozważane równanie, to

$$x_{n+4} = x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} = (x_{n+2} + x_{n+1} + x_n) + x_{n+2} + x_{n+1} = \\ (x_{n+2} + x_{n+2}) + (x_{n+1} + x_{n+1}) + x_n = x_n$$

Zatem $x_{n+4} = x_n$ dla każdego n. A więc $(x_4, x_5, x_6) = (x_0, x_1, x_2)$. Zatem obcięć ciągów ze zbioru Z do zbioru $\{3,4,5\ldots\}$ jest tyle samo co ciągów (x_0, x_1, x_1), czyli 8.
Uwaga. Część z Was rozwiązała poprawnie pierwszą część, a potem stwierdziła, że analogiczne rozumowanie przenosi na drugą część zadania. To nie jest prawda (bez żadnych dodatkowych argumentów)
Uwaga. Jeśli ktoś żmudnie, ale bez popełnienia błędów, wyznaczył

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

dla wszystkich możliwych 8 początków (x_0, x_1, x_2) i z tego wywnioskował, że odpowiedź na drugą część to również 8, to otrzymał 5 pkt.

Zadanie 4

Niech $F(X) = \{Y \in P(X) : |Y| < \aleph_0\}$. Dla jakich zbiorów X w częściowym porządku $(F(X), \subseteq)$ każdy łańcuch ma ograniczenie górne?
Rozwiązanie. Jeśli X jest zbiorem skończonym, to $F(X) = P(X)$ i wtedy X jest elementem największym w $(F(X), \subseteq)$, więc jest ograniczeniem górnym każdego podzbioru (w szczególności łańcucha) zbioru $F(X)$.

Załóżmy teraz, że Z jest zbiorem nieskończonym. Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie nieskończonym różnowartościowym ciągiem elementów zbioru X. Niech $A_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Wtedy

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$$

jest łańcuchem w $(F(X), \subseteq)$ bez ograniczenia górnego (bo w $F(X)$ nie ma zbiorów nieskończonych, a każde ograniczenie górne tego łańcucha musi zawieraćw sobie zbiór $\bigcup_n A_n = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Zatem, w w porządku $(F(X), \subseteq)$ każdy łańcuch ma ograniczenie górne wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X jest skończony.
Uwaga. Kilku z was rozwiązało to zadanie inaczej. Oto to inne rozumowanie. Jeśli w $(F(X), \subseteq)$ każdy łańcuch ma ograniczenie górne, to z Lematu Kuratowskiego - Zorna wynika, że w $(F(X), \subseteq)$ istnieje element maksymalny. A z tego łatwo wywnioskować, że X musi być skończony. Ładne rozumowanie !

Zadanie 5

Na zbiorze $P(\mathbb{N})$ określamy relację

$$(A \equiv B) \iff (|A \triangle B| < \aleph_0) \ .$$

1. Pokaż,że $\sim$ jest relacją równoważności.
2. Wyznacz $[\emptyset]_\equiv$.
3. Wyznacz $|P(\mathbb{N})/_\equiv|$.

Rozwiązanie. (1) Zwrotność $\sim$ wynika z tego, że $A \triangle A = \emptyset$ dla dowolnego zbioru A. Symetria wynika z tego, że $A \triangle B = B \triangle A$. Przechodniość wynika z tego

$$A \triangle C = (A \triangle B) \triangle (B \triangle C) \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$$

(2) Mamy

$$[\emptyset]_\equiv = \{A \in P(\mathbb{N}) : A \equiv \emptyset\} = \{A \in P(\mathbb{N}) : |A \triangle \emptyset| < \aleph_0\}$$

więc $[\emptyset]_\equiv = \{A \in P(\mathbb{N}) : |A| < \aleph_0\}$, czyli jest to rodzina wszystkich skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych.

(3) Jest jasne, że $|P(\mathbb{N})/_\equiv| \leqslant \mathfrak{c}$. Dla $x \in \mathbb{R}$ definiujemy zbiór $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Z gęstości zbioru liczb wymiernych zbiorze liczb rzeczywistych wynika, że $x \neq y \to |A_x \triangle A_y| = \aleph_0$. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ będzie ustaloną bijekcją oraz niech $B_x = f^{-1}[A_x]$. Wtedy $(\forall x \in \mathbb{R})(B_x \subseteq \mathbb{N})$ oraz $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \neq y \to |B_x \triangle B_y| = \aleph_0)$, więc $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \neq y \to [B_x]_\equiv \neq [B_y]_\equiv)$, więc $|P(\mathbb{N})/_\equiv| \geqslant \mathfrak{c}$. Z twierdzenia Cantora Bernsteina wynika, że $|P(\mathbb{N})/_\equiv| = \mathfrak{c}$.
Uwaga. Kilku z Was rozwiązało to zadanie inaczej. Pokazali, że dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ mamy $|[A]_\equiv| = \aleph_0$. A następnie rozumowano tak: gdyby $|P(\mathbb{N})/_\equiv| < \mathfrak{c}$, to $|P(\mathbb{N})| = |\bigcup P(\mathbb{N})/_\equiv| \leqslant |\bigcup P(\mathbb{N})/_\equiv| \cdot \aleph_0 < \mathfrak{c}$. Fajne rozumowanie !