TAUTOLOGIE

1. $\models ((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$

$\models ((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$ prawo rozdz. $\wedge$ względem alternatywy

P. $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ w $\mathbb{R}$

P

$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \equiv$

$\big(((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \wedge r\big) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \equiv$

$\big(((p \vee \neg p) \wedge \neg q) \wedge r\big) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \equiv$

$(\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r).$

Wnioskowania

Def: $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\} \models \psi$
jeśli dla dowolnej waluacji π takiej, że
$$val(\varphi_1,\pi)=\dots=val(\varphi_n,\pi)=1$$
mamy $val(\psi,\pi)=1$.

Tw.

1. $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}\models\psi$
2. $\models(\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_n)\to\psi$

$\mathcal{L}=\{\varphi_1,\dots,\varphi_k\}$ – lista zdań

Co mogę z $\mathcal{L}$ wywnioskować

$\mathcal{L}\models\psi \equiv$ zawsze, jeśli zdania z $\mathcal{L}$ są 1 to również ψ ma wart. 1

D-d. (2) $\to$ (1)

Zał. że (2). Weźmy π t.że
$$val(\varphi_1,\pi)=\dots=val(\varphi_n,\pi)=1$$
wtedy
$$val(\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_n,\pi)=1$$
z (2) mamy $val(\psi,\pi)=1$.

F1. $\{\varphi_1,\dots,\varphi_k\} \models \alpha \Rightarrow \{\varphi_1,\dots,\varphi_k,\varphi_{k+1},\dots,\varphi_n\} \models \alpha$

F2. $\{\varphi_1,\dots,\varphi_k\} \models \alpha$ wtedy

$$\{\varphi_1,\dots,\varphi_k\} \models \psi \text{ iff } \{\varphi_1,\dots,\varphi_k,\alpha\} \models \psi$$

D-d ($\Rightarrow$) jasne; ($\Leftarrow$) zał. (P). Weźmy π t. że ~~takie~~ $val(\varphi_1,\pi) = \dots = val(\varphi_k,\pi) = 1$. Z zał. mamy $val(\alpha,\pi) = 1$. wtedy, z (P) mamy $val(\psi,\pi) = 1$ $\blacksquare$

(P) $\{\underset{1}{\varphi}, \underbrace{\varphi \to \psi}_{1}\} \models \underset{1}{\psi}$

reguła MODUS-PONENS

Oznaczenie: $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \vDash \psi$ iff $\dfrac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k}{\psi}$

Modus Ponens: $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vDash \psi$

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi} \quad (MP)$$

(P) $\{p, p \to q, q \to r, r \to s\} \vDash s$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, \ p \to q}{q}, \ q \to r}{r}, \ r \to s}{s}$$

Q?

$\vDash [p \wedge (p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to s)] \to s$

Tab. 0-1: $2^4 = 16$ wierszy

F. Zał, że $\vDash \tau$. Wtedy

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vDash \alpha$

iff

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \tau\} \vDash \alpha$

Rezolucja!

$$\frac{\varphi \vee \alpha, \quad \neg\varphi \vee \beta}{\alpha \vee \beta} \ (\mathrm{Rez})$$

D-d. Zał. że $val(\varphi \vee \alpha) = 1$ i $val(\neg\varphi \vee \beta) = 1$.

C1. $val(\varphi, \pi) = 1$

Z tego, że $val(\neg\varphi \vee \beta) = 1$, ~~wiec~~ mamy $val(\beta) = 1$

więc $val(\alpha \vee \beta) = 1$

C2. $val(\varphi, \pi) = 0$

wtedy $val(\alpha, \pi) = 1$, więc $val(\alpha \vee \beta) = 1$ ∎

p (L. Carroll)

"$\underbrace{\text{uprawiasz sport}}_{p} \longrightarrow \underbrace{\text{urośniesz}}_{q}$"

$p \to q \iff \neg p \vee q$ ← klauzula

skorzystajcie z rezolucji

UWAGA: $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \alpha \equiv \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\} \models \alpha$

ZDE $\rightsquigarrow$ CNF $\underset{\text{rezolucja}}{\rightsquigarrow}$ CEL

UWAGA:

Zał. $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \underbrace{p \wedge \neg p}_{\bot}$. $(*)$

wtedy

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \alpha \equiv \{\varphi_1, \dots, \varphi_n, p \wedge \neg p\} \models \alpha$$

$(*) \rightarrow$ potw. wszystko $\Leftarrow \{\neg p \wedge p\} \models \alpha \equiv$

$$\models (p \wedge \neg p) \rightarrow \alpha.$$

$(*) \equiv$ "$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – sprzeczny".

Zadania. (1) lista zadań

(2) Zbiór zadań z Logiki i T. Mnogości

Marek + Onyszkiewicz

Zadanie: Pok. że nast. zdania są taut.!

1) 1
2) 2
...
6
20) 5

(3) K. Kuratowski, "Wstęp do Teorii Mnogości i Topologii"

$\boxed{P = NP}$

spełn. formuł CNF.

φ

$\begin{cases} \text{TAK} : \varphi \text{ jest spełnialna} \\ \text{NIE} : \varphi \text{ jest sprzeczna.} \end{cases}$

wyrocznia

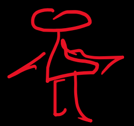
φ — ma 100 zmiennych $\longrightarrow$ 1 sek.

$\varphi \rightsquigarrow \{p_1, \ldots, p_{100}\}$

100 kroków

100 sekund

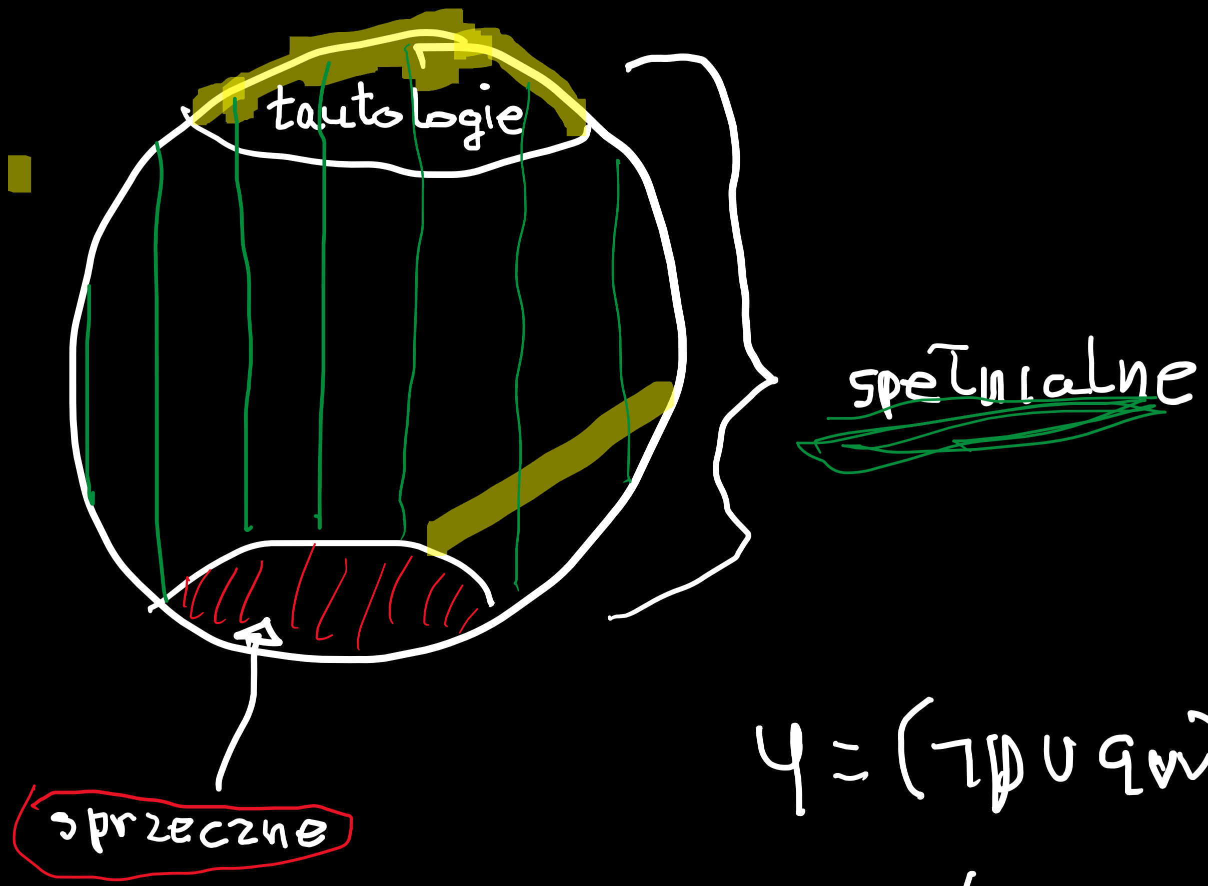
- $\varphi \rightsquigarrow \varphi[p_1 / T] = \varphi_1$

  $\varphi_1 \rightsquigarrow$ 

  TAK $r = (1, ?, ?, ?, \ldots)$

  NIE $r = (0, ?, ?, ?, \ldots, ?)$

-



Zadanie CNF

$$\varphi = (\neg p \vee q \vee r) \wedge \dots \wedge (\neg r)$$

$$\neg\varphi = (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \dots \vee (\quad)$$

↑ DNF

Dyskusja po wykładzie.