Kwantyfikatory - II

$\Omega \neq \emptyset$; $\varphi : \Omega \times \Omega \longrightarrow \{0,1\}$

$(*) = (\exists y)\underbrace{(\forall x)\varphi(x,y)}$

$(\forall x)(\exists y)\varphi(x,y)$

$x \in \Omega$

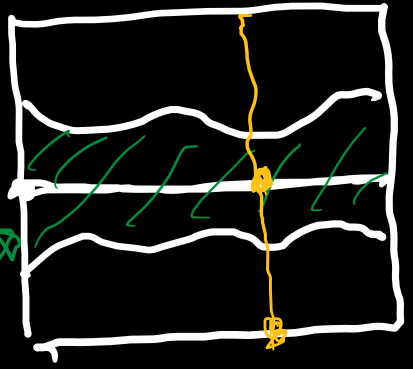
$\downarrow$

$(x,y^*) \in D_\varphi$

$\varphi(x,y^*)$

$\tilde{\varphi}(y) = (\forall x)\varphi(x,y)$

y^*



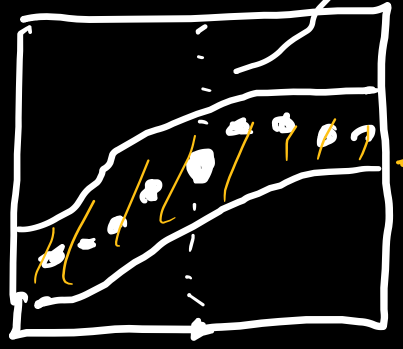
x

$(*) \equiv \{y \in \Omega : \tilde{\varphi}(y)\} \neq \emptyset$

jest $y^* \in \Omega$ t. że

$\forall x \; \varphi(x,y^*)$

$\{(x^*,y) : y \in \Omega\}$



x^*

D_φ

D-d:

$D_\varphi = \{(x,y) \in \Omega^2 : \varphi(x,y)\}$

FAKT : $\boxed{(\exists y)(\forall x)\varphi(x,y) \longrightarrow (\forall x)(\exists y)\varphi(x,y)}$

$$\models \left((\exists y)(\forall x)\varphi(x,y) \longrightarrow (\forall x)(\exists y)\varphi(x,y) \right)$$

(P) $\Omega = \mathbb{R}$; $\varphi(x,y) =$ "$x \leq y$".

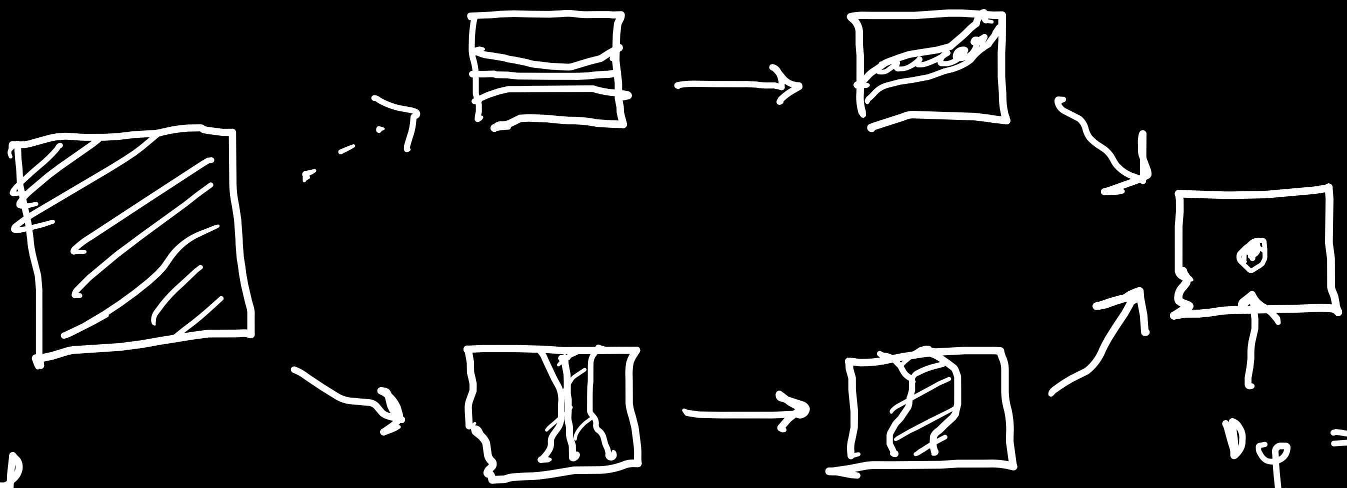
1. P : $(\forall x)(\exists y)(x \leq y)$ ← Prawda
mając $x \in \mathbb{R}$
kładziemy $y = x$.

2. L : $(\exists y)(\forall x)(x \leq y)$ $\equiv$ istnieje
najw. l. rzeczywista
FAŁSZ

l

$\Omega \neq \emptyset$

$$
\begin{tikzcd}
 & (\exists y)(\forall x)\varphi(x,y) \arrow[r] & (\forall x)(\exists y)\varphi(x,y) \arrow[dr] & \\
\boxed{\begin{array}{c}(\forall x)(\forall y)\varphi(x,y) \\ \Updownarrow \\ (\forall y)(\forall x)\varphi(x,y)\end{array}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \boxed{\begin{array}{c}(\exists x)(\exists y)\varphi(x,y) \\ \Updownarrow \\ (\exists y)(\exists x)\varphi(x,y)\end{array}} \\
 & (\exists x)(\forall y)\varphi(x,y) \arrow[r] & (\forall y)(\exists x)\varphi(x,y) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$



D_φ

$D_\varphi \neq \emptyset$

żadne inne implikacje nie są uniwersalne (tzn. dla dowolnej $\Omega \neq \emptyset$ z dowolnej φ) prawdziwe

P

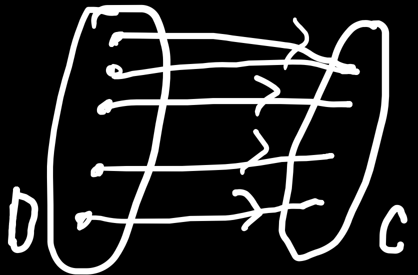
$x \approx y$ = "x ma schadzki z y"

$(\exists y \in C)(\forall x \in D)(x \approx y)$

"istnieje Casanowa"

$(\forall x \in D)(\exists y \in C)(x \approx y)$

"żadna dziewczyna nie jest samotna"



P (Analiza) $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

jedn. ciągł. $\quad (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x)(\forall y)(|x-y|<\delta \to |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$

$\exists \delta>0\ \forall x \to (\forall x)(\exists \delta>0)$

Tw. $\quad (\forall \varepsilon>0)(\forall x)(\exists \delta>0)(\forall y)(\text{ — } \text{ " } \text{ — })$

$(\forall x)\ \underbrace{(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall y)(\ldots)}$

$\equiv$ $\quad f$ jest ciągła w x

f jest ciągła

P $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \neq 1$

$$\neg (\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)\left(\left|\frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon\right)$$

$$\equiv$$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N)(\exists n > N)\left(\left|\frac{1}{n} - 1\right| \geq \varepsilon\right)$$

weźmy $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . . . . . .

$\blacksquare$

"Gra w zapałki"

mamy n-zapałek; mamy 2 graczy;
możemy wybrać 1, 2, 3 zapałki;
wybieramy na przemian;
wygrywa kto weźmie ostatnią.

P

$$20 \xrightarrow[-2]{(1)} 18 \xrightarrow[-2]{(2)} 16 \xrightarrow[-3]{(1)} 13 \xrightarrow[-1]{(2)} 12 \xrightarrow[-1]{(1)} 11 \xrightarrow[-3]{(2)} 8 \xrightarrow[-3]{(1)}$$

$$5 \xrightarrow[-1]{(2)} 4 \xrightarrow[-2]{(1)} 2 \xrightarrow[2]{(2)} 0$$

II gracz wygrał

(*) gra ma długość $\leq n$

(**) możemy zał. że ma długość n

$$\underbrace{20 \to \ldots \to 2 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0}_{20}$$

$\underline{I}$ - ma strategię zwycięzką $\qquad n = 20$

$\Updownarrow$

$$(\exists x_1 \in D())(\forall x_2 \in D(x_1))(\exists x_3 \in D(x_1, x_2)) \ldots (\forall x_{20} \in D(x_1 \ldots x_{19}))$$

$$(\underline{I} \text{ wygrywa w } (x_1, x_2, \ldots, x_{20}))$$

$\neg(\underline{I}$ ma str. zwycięzkę $)$

$\Updownarrow$

$$(\forall x_1 \in D())(\exists x_2 \in D(x_1)) \ldots (\exists x_{20} \in D(x_1 \ldots x_{19}))$$

$$(\underline{II} \text{ wygrywa w } (x_1, x_2, \ldots, x_{20}))$$

$\Updownarrow$

$\underline{II}$ ma str zwycięzką

Wn. $\boxed{(\underline{\mathrm{I}} \text{ ma str. zwyc}) \vee (\underline{\mathrm{II}} \text{ ma str. zwycięzką})}$

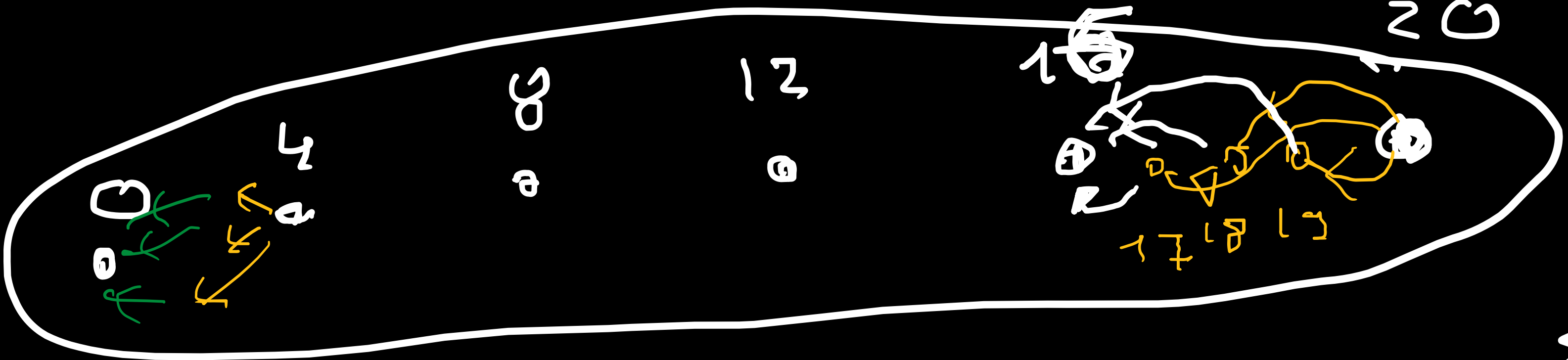
$\begin{cases} 1. \text{ gra jest skończona} \\ 2. \text{ jest } 0-1 \quad (\underline{\mathrm{I}} \text{ wygr} \vee \underline{\mathrm{II}} \text{ wygrywa}) \\ 3. \text{ gra jest dwu-osobowa [nie ma remisów]} \end{cases}$

Wn. Skończ. 2-osobowe gry są ZDETERMINOWANE.

(P) zapałki ; 1, 2, 3 ← tyle można brać

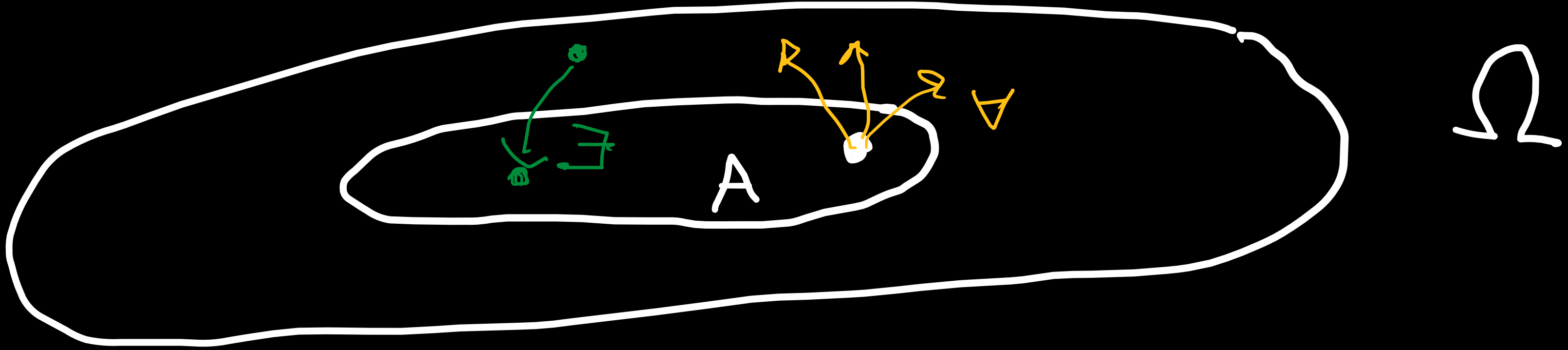
$n = 20$

FAKT : $\underline{\mathrm{II}}$ ma str. zwyc.



$\{0, 1, 2, \dots 20\}$

str. 11 zadanie: "graj w liczby podzielne przez 4"



$A \in$ jądro gry.

Szachy : • ogr. na długość

• eliminacja remisów

ZDETERMINOWANE

NIE ZNAMY STR. ZWYCIĘZKIEJ

UWAGI :

prosta formuła

$\Omega = \mathbb{R}$ $\quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists t)\,\varphi(x,y,z,t)$

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)(\forall x_5)(\exists x_6)(\exists x_7)\varphi(x_1 \ldots x_7)$$

$$\cong$$

$\underline{\Omega = R}$

$$(\exists x_1, x_2, x_3)(\forall x_4, x_5)(\exists x_6, x_7)\varphi(x_1 \ldots x_7)$$

$$\cong$$

$$\underbrace{(\exists \bar{x} \in R^3)(\forall \bar{y} \in R^2)(\exists \bar{z} \in R^2)\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

formuła o stopniu komplikacji 3

$$(\forall \bar{x})(\exists \bar{y} \in R^2)(\forall \bar{z})\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

HEURYSTYKA:

"trudność twierdzenia" ~ "stopień trudu formuły"

$$(\forall \bar{x})(\exists \bar{z})(\forall \bar{t})\, \varphi(\bar{x}, \bar{u}, \bar{t})$$

próg wzrostu ~ $3 \div 4$.