UWAGA : $(\forall x)(\exists y)\varphi(x,y) = (*)$

interpretacja: ± gra dwuosobowa:

$\underline{\overline{I}}$ gracz : podaje x

$\underline{\overline{II}}$ gracz : pokazuje y t. że $\varphi(x,y)$

$(*)$ jest prawdą $\equiv$ $\underline{\overline{II}}$ ma str. zwycięską

Zadanie $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

$1/\varepsilon$

$$(\forall \varepsilon>0)\,(\exists N)\,\underbrace{(\forall n>N)\left(\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon\right)}_{\varphi(\varepsilon,N)}$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

ustalmy $\varepsilon > 0$.

niech $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$.

wtedy $n > N \to n > \frac{1}{\varepsilon} \to \frac{1}{n} < \varepsilon$ ∎

DZIAŁANIA UOGÓLNIONE

zbiór, którego elementami są zbiory

|||

Def. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną zbiorów

1) (suma $\mathcal{A}$):

$$x \in \bigcup \mathcal{A} \overset{def}{\equiv} (\exists A \in \mathcal{A})(x \in A)$$

2) (przekrój $\mathcal{A}$) dla $\mathcal{A} \neq \emptyset$

$$x \in \bigcap \mathcal{A} \equiv (\forall A \in \mathcal{A})(x \in A)$$

Ⓟ $\mathcal{A} = \{A, B\}$

$$x \in \bigcup \mathcal{A} \equiv (\exists X \in \mathcal{A})(x \in X) \equiv (\exists X)(X \in \mathcal{A} \wedge x \in X)$$

$\bigcup\{A, B\} = A \cup B$

$$\equiv (\exists X)((X = A \vee X = B) \wedge x \in X) \equiv$$

$$\equiv (\exists X)(\{X = A \wedge x \in X) \vee [X = B \wedge x \in X])$$

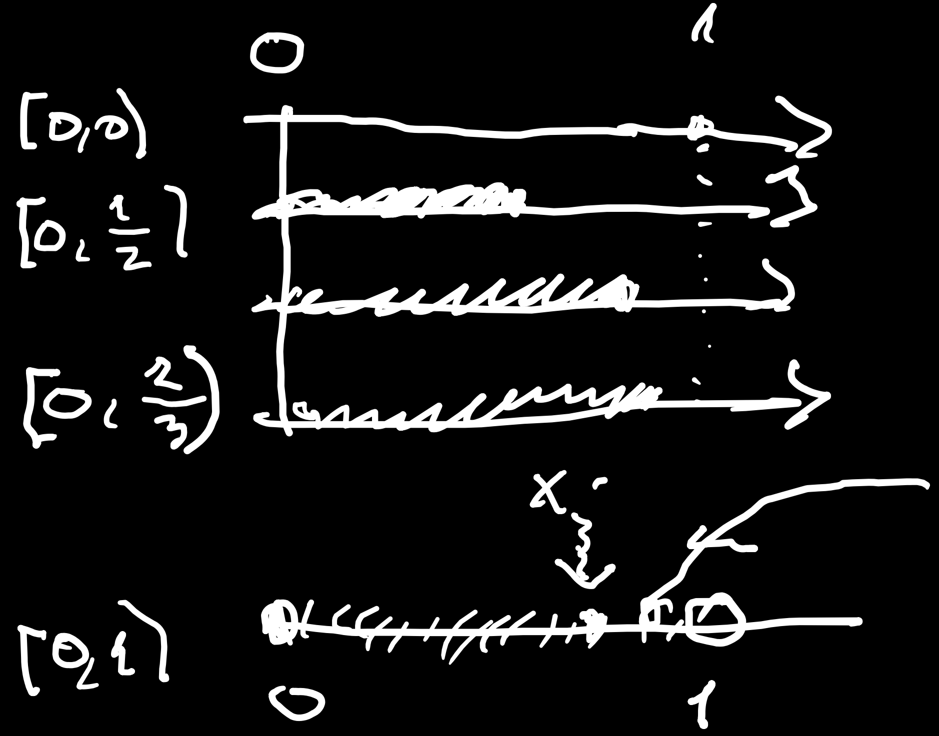
$$\equiv (\exists X)(x \in A \vee x \in B) \equiv (\exists X)(x \in A \cup B) \equiv x \in A \cup B$$

$$\bigcup\{A, B\} = A \cup B$$

podobnie: $\bigcup\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

Ⓟ $\mathcal{A} = \{[0, {}^{1-}\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$

$$x \in \bigcup\mathcal{A} \equiv (\exists n \geq 1)(x \in [0, {}^{1-}\frac{1}{n})) \equiv (\exists n \geq 1)(0 \leq x < 1 - \frac{1}{n})$$



$1 - \frac{1}{n} > x$

$$x \leq 1 - \frac{1}{n} \rightarrow x < 1$$

$$\equiv x \in [0, 1)$$

$$\bigcup\mathcal{A} = [0, 1)$$

$$\lim_{n} (1 - \frac{1}{n}) = 1$$

UWAGA: 1) $\bigcap\{A, B\} = A \cap B$

2) $\bigcap\{A_1, \dots, A_n\} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

3) $\mathcal{A}$ - rodz. zb. $\equiv (\forall X \in \mathcal{A})$ (X jest zbiorem)

$\equiv (\forall X)(X \in \mathcal{A} \to X$ jest zbiorem $)$

? $\emptyset$ jest rodz. zb. ? $\equiv \underbrace{(\forall X)(\underbrace{X \in \emptyset}_{0} \to X \text{ jest zbiorem})}_{1} \equiv 1$

$x \in \bigcap \emptyset \equiv (\forall X)\underbrace{(\underbrace{X \in \emptyset}_{0} \to x \in X)}_{1} \equiv x$ jest dowolne

„sprzeczność"

wn. $\bigcap \mathcal{A}$ jest określony dla $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

UWAGA: $\boxed{\bigcup P(X) = X}$ Zadanie!

UWAGA: • rachunek zdań: $\wedge, \vee, \rightarrow, \ldots, \pi$

• rach. predykatów ≡ rach. zdań + kwantyfikatory

predykat ≡ nazwa na relacje

$A \in P(X) \equiv A \subseteq X \Rightarrow \bigcup P(X) \subseteq X$

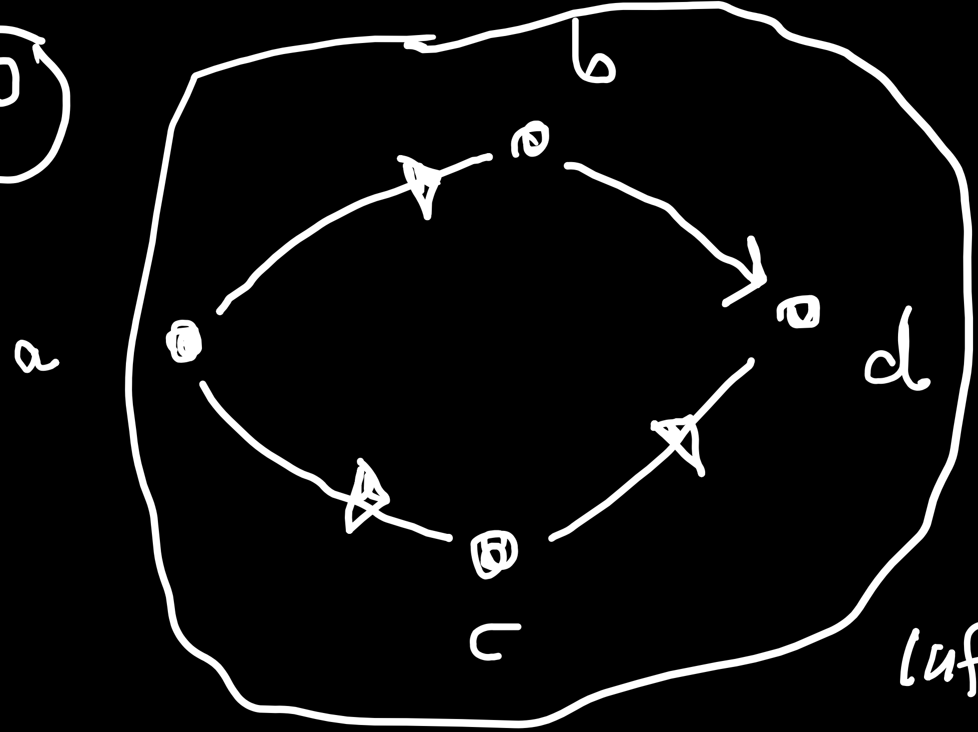
$x \in X \rightarrow \{x\} \subseteq X \longrightarrow \{x\} \in P(X) \longrightarrow x \in \bigcup P(X)$

Po wykładzie

RELACJE

Def. R jest relacją $\equiv$ istnieje X t.że
$$R \subseteq X \times X.$$

Ⓟ



$X = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a,b), (b,d), (a,c), (c,d)\}$

Informatyka:

$R \longleftrightarrow [[a,b],[b,d],[a,c],[c,d]]$

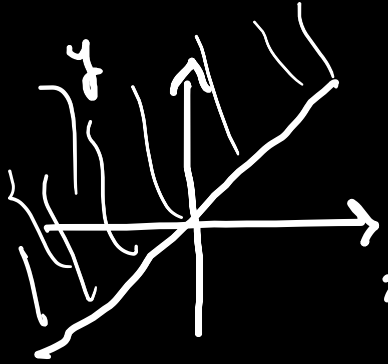
lista list

R oznaczamy ⇝ :

$(a,b) \in R \equiv a \rightsquigarrow b$

P. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : (\exists t \in \mathbb{R})(y = x + t^2)\}$

$(x,y) \in R \equiv x \leq y$



$\leqslant = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (\exists t \in \mathbb{R})(y = x + t^2)\}$

$(x,y) \in \leqslant \;\equiv\;$ "$x \leq y$" w tradyc. sensie

term.

$\boxed{\text{prefixowa}}$

Uwaga: Często: $(x,y) \in R \; : \cdot : \; R(x,y)$

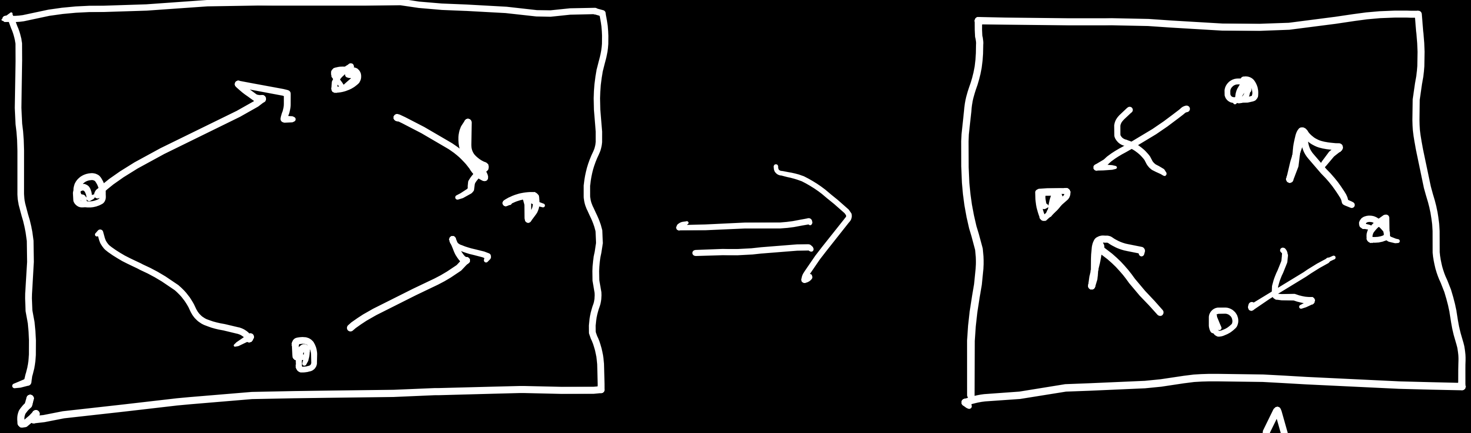
$: \cdot : \; xRy$

Ⓟ

$<_{\mathbb{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : (\exists t > 0)(y = x + t^2)\}$

$\boxed{\text{notacja infixowa}}$

① ODWROTNOŚĆ



R $\qquad$ R^{-1}

$$\begin{array}{c} R \subseteq X^2 \\ \downarrow \\ R^{-1} \subseteq X^2 \end{array}$$

$$R^{-1} = \{(a,b) : (b,a) \in R\}$$

$x, y \in \mathbb{R}$

$$x \leq^{-1} y \equiv (x,y) \in \leq^{-1} \equiv (y,x) \in \leq$$

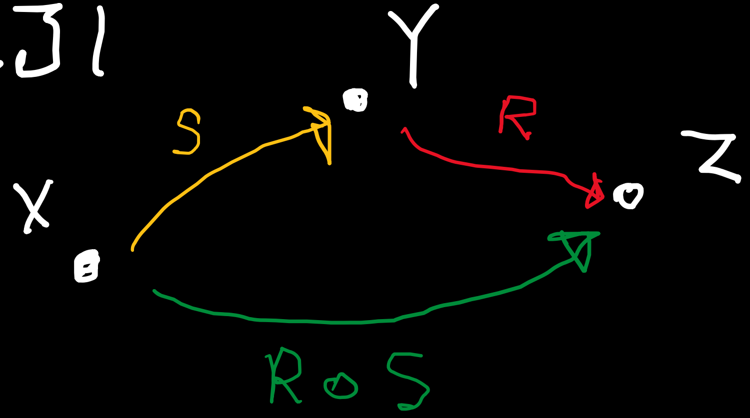
$$\equiv y \leq x$$

FAKT: $\boxed{(R^{-1})^{-1} = R}$

operacja "odwr" jest idempotentna.

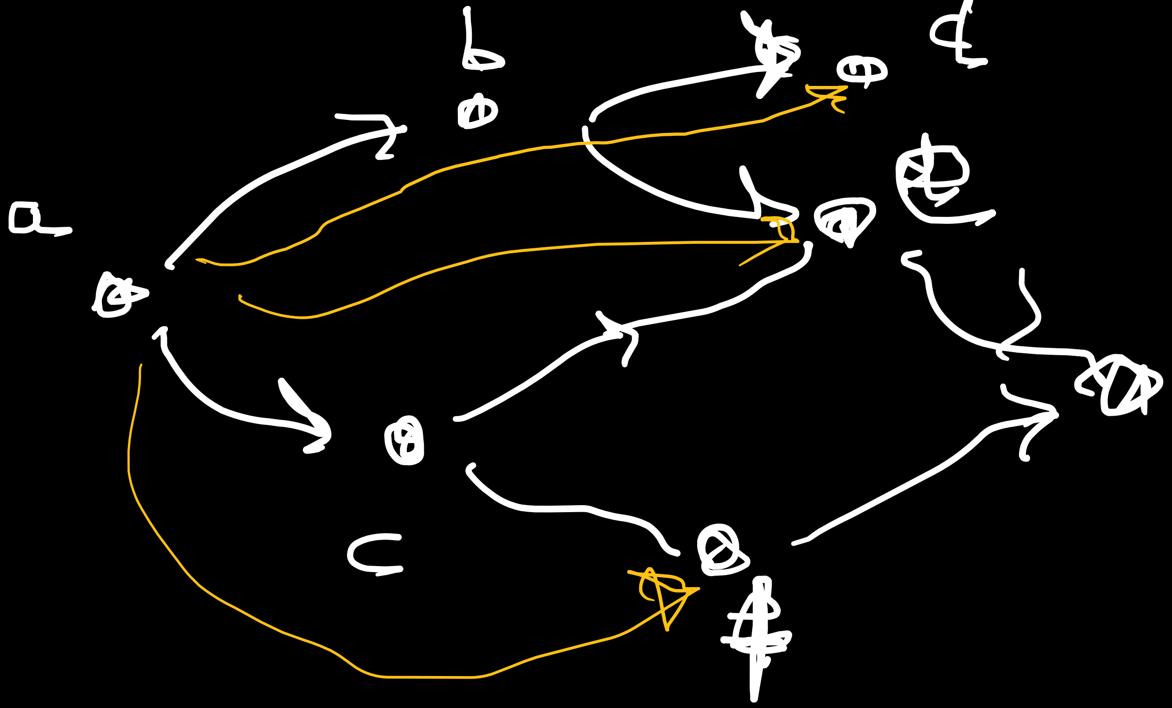
(II) ZŁOZENIE RELACJI

$R, S \subseteq X^2$.



$$R \circ S = \{(x,z) \in X^2 : (\exists y)((x,y) \in S \wedge (y,z) \in R)\}$$

$R \subseteq X^2$
$S \subseteq Y^2$: $R, S \subseteq (X \cup Y)^2$

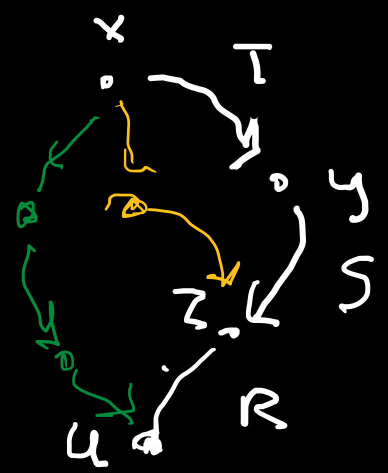


znajomi znajomych
osoby a

{d, e, f}

Tw. $\boxed{R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T}$

D-d:



$$(x,u) \in R \circ (S \circ T) \equiv (\exists z)\big((x,z) \in S \circ T \wedge (z,u) \in R\big)$$

$$\equiv \underline{(\exists z)}\Big(\underline{(\exists y)}\underbrace{\big((x,y) \in T \wedge (y,z) \in S\big)}_{\text{tu wyst. } y} \wedge \underbrace{(z,u) \in R}_{\text{tu nie ma } y}\Big)$$

!

$$\equiv (\exists z)(\exists y)\big((x,y) \in T \wedge (y,z) \in S \wedge (z,u) \in R\big)$$

$$(x,u) \in (R \circ S) \circ T \equiv (\exists y)\big((x,y) \in T \wedge (y,u) \in R \circ S\big)\big)$$

$$\equiv \underline{(\exists y)(\exists z)}\big((x,y) \in T \wedge (y,z) \in S \wedge (z,u) \in R\big)$$

$$(\exists a)\varphi(a) \wedge p \equiv (\exists a)(\varphi \wedge p)$$

■

$$\boxed{(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}}$$

$$(x,y)\in(R\circ S)^{-1} \equiv (y,x)\in R\circ S \equiv$$

$$\equiv (\exists t)\big((y,t)\in S \wedge (t,x)\in R\big)$$

$$\equiv (\exists t)\big(\underline{(x,t)\in R^{-1} \wedge (t,y)\in S^{-1}}\big)$$

$$(\exists t)\big(\underline{(t,y)\in S^{-1}\wedge(x,t)\in R^{-1}}\big)$$

$$\models (p\wedge q)\leftrightarrow(q\wedge p)$$

$$\equiv (x,y)\in S^{-1}\circ R^{-1} \quad ■$$