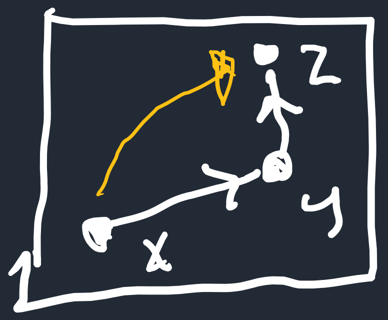
Relacje - c.d.

1) R jest <u>zwrotna</u> na X $\equiv$ $Id_X \subseteq R$

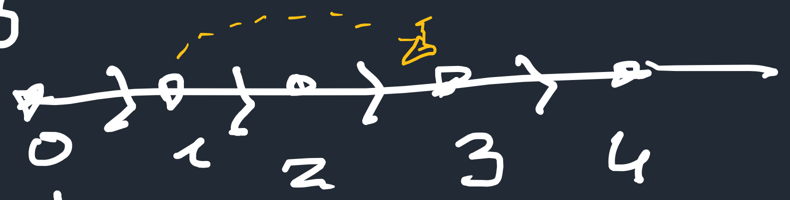
2) R jest <u>symetryczna</u> $\equiv$ $R^{-1} = R$

3) R jest <u>przechodnia</u> $\equiv$ $(\forall x,y,z)\big(((x,y)\in R \wedge (y,z)\in R) \rightarrow (x,z)\in R\big)$



P. $\leq$ na $\mathbb{R}$: $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$

P. $\{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$



To nie jest przech.

FAKT. R jest przechodnia $\equiv R \circ R \subseteq R$

D-d. $\Rightarrow$ $(x,z) \in R \circ R \equiv (\exists y)((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R)$

$\rightarrow (\exists y)((x,z) \in R) \equiv (x,z) \in R$ ∎

$\Leftarrow$ zadanie

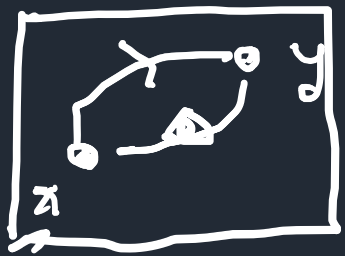
• R jest słabo-antysymetryczna $\equiv$

$(\forall x,y)\big(((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \rightarrow x = y\big)$

(P) $\leq$ - na $\mathbb{R}$: $x \leq y \wedge y \leq x \longrightarrow x = y$

(P) $\mathbb{N}^+$: $k \mid l \equiv (l \bmod k = 0)$

$k \mid l \wedge l \mid k \longrightarrow k = l$



$x \neq y$

KONTRPRZYKŁ.

RELACJE RÓWNOWAŻNOŚCI

Def. Relacja $R \subseteq X \times X$ jest rel. równoważności na X jeśli
1) R jest zwrotna na X
2) R jest symetryczna
3) R jest przechodnia

(P) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$ $\quad R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- $x \in \mathbb{R}$: $|x| = |x| \to (x,x) \in R$ $\quad$ zw R

symetr. • $(x,y) \in R \Rightarrow |x| = |y| \to |y| = |x| \to (y,x) \in R$.

przech • $\left.\begin{matrix}(x,y) \in R \\ (y,z) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}|x| = |y| \\ |y| = |z|\end{cases} \to |x| = |z| \to (x,z) \in R$

(P) $X = \mathbb{Z}$; $n \in \mathbb{N}^+$;

$$x \sim_n y \overset{def}{\equiv} n \mid (x-y).$$

$n \mid 0$ · ???

$k \mid \ell \equiv$

$(\exists a)(k \cdot a = \ell)$

$n \mid 0$ bo $n \cdot 0 = 0$

zwr. • $n \mid (x-x) \longrightarrow x \sim_n x$

~~Ant~~ sym. • $x \sim_n y \equiv n \mid (x-y)$

$$\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(n \cdot k = x - y)$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(-n \cdot k = y - x) \equiv$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z})(n \cdot (-k) = y - x) \equiv (\exists \ell \in \mathbb{Z})(n \cdot \ell = y - x)$$

$$\equiv y \sim_n x$$

Przechodniość $\sim_n$:

Załóżmy. $x \sim_n y$ i $y \sim_n z$, czyli

$n \mid (x-y)$ i $n \mid (y-z)$, czyli

istnieją $a, b \in \mathbb{Z}$ t. że

$$n \cdot a = x - y$$
$$n \cdot b = y - z.$$

wtedy

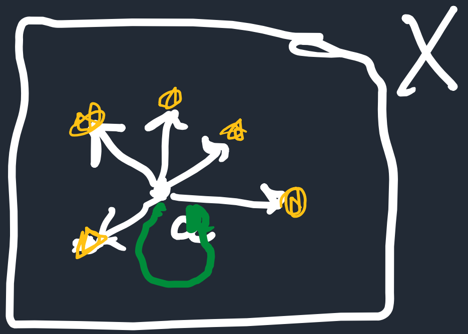
$$n \cdot \underbrace{(a+b)}_{\mathbb{Z}} = x - z,$$ więc

$n \mid (x-z)$, więc $x \sim_n z$.

Def. Niech $\approx$ będzie rel. równ. na X.
Dla $a \in X$ definiujemy

$$[a]_{\approx} = \{x \in X : a \approx x\}$$

(klasa abstrakcji elem. a względem $\approx$)



$$[a]_{\approx} = \approx[\{a\}] \quad (\text{obraz zbioru } \{a\})$$

- weźmy $a \in X$. Wiemy, że $a \approx a$
więc $a \in [a]_{\approx}$ (więc $[a]_{\approx} \neq \emptyset$)

• $a \approx b \longrightarrow [a]_{\approx} = [b]_{\approx}$

<u>D-d</u>. Załóżmy, że $a \approx b$.

1) $\left.\begin{matrix} x \in [a]_{\approx} \\ a \approx b \end{matrix}\right\} \equiv \left|\begin{matrix} a \approx x \\ a \approx b \end{matrix}\right\} \overset{sym}{\equiv} \left\{\begin{matrix} x \approx a \\ a \approx b \end{matrix}\right\} \overset{przech}{\Rightarrow} x \approx b$

$\overset{sym}{\equiv} b \approx x \equiv x \in [b]$

$[a]_{\approx} \subseteq [b]_{\approx}$

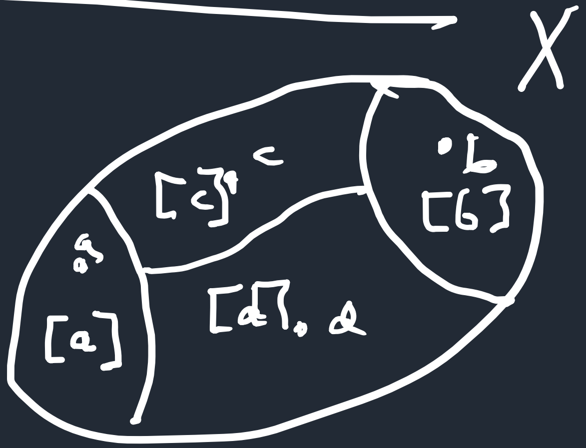
2) z SYMETRII, $[b]_{\approx} \subseteq [a]_{\approx}$.

• $[a]_\approx \cap [b]_\approx \neq \emptyset \longrightarrow a \approx b$

Zał. że $x \in [a]_\approx \cap [b]_\approx$. Wtedy

$\begin{cases} a \approx x \\ b \approx x \end{cases}$ więc [symetria] $\begin{cases} a \approx x \\ x \approx b \end{cases}$, więc $a \approx b$ (przech.) ■

- $a \in [a]_\approx$
- $a \approx b \longrightarrow [a]_\approx = [b]_\approx$
- $[a]_\approx \cap [b]_\approx \neq \emptyset \longrightarrow a \approx b$



DEF: $X/_\approx = \{[a] : a \in X\}$

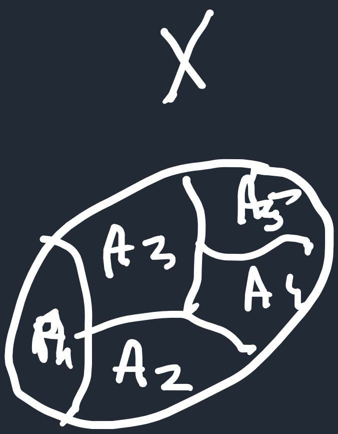
przestrzeń ilorazowa.

DEF. Ustalmy zbiór X. Rodzinę $\mathcal{P} \subseteq P(X)$ nazywamy rozbiciem X jeśli

1) $(\forall A \in \mathcal{P})(A \neq \emptyset)$

2) $(\forall A, B \in \mathcal{P})(A \cap B \neq \emptyset \to A = B)$

3) $\bigcup \mathcal{P} = X$.



$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$

WNIOSEK. $X/\approx$ jest rozbiciem X

$X/\approx \; = \{[a]_\approx : a \in X\}$

$[a]_\approx = \{x \in X : a \approx x\}$

D-d (3). Weźmy $a \in X$.

np. $A = [a]$,

$a \in \bigcup(X/\approx) \equiv (\exists A \in X/\approx)(a \in A) \equiv 1$ ∎

(P) Ω = zbiór ludzi

$x \approx y \iff \text{płeć}(x) = \text{płeć}(y)$

$\Omega/\approx \; = \{\text{KOBIETY}, \text{MĘŻCZYŹNI}\}.$

$[AJ]_{\approx} = \{x \in \Omega : \text{płeć}(AJ) = \text{płeć}(x)\}$

$= \text{KOBIETY}$

$[BP]_{\approx} = \text{MĘŻCZYŹNI}$

(P) Ω = "zbiór wszyst. zbiorów skończ."

$$X \sim Y \equiv (\exists f)\left(f : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y\right)$$

$$[\{a,b,c\}]_{\sim} = \{X \in \Omega : X \sim \{a,b,c\}\}$$

$$= \{X \in \Omega : X \sim \{0,1,2\}\}$$

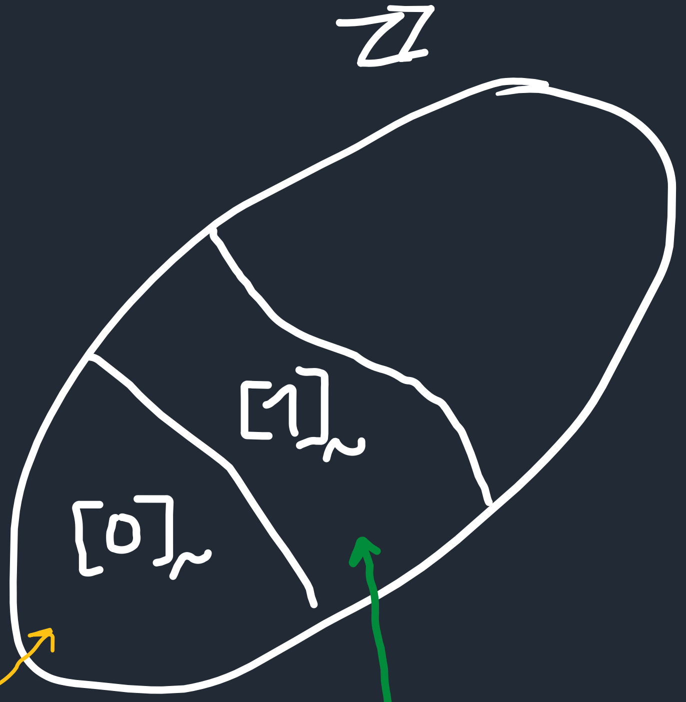
$$= 3$$

$a \neq b$
$b \neq c$
$a \neq c$

$[\emptyset] = \{\emptyset\}$

Ⓟ $X = \mathbb{Z}$; $n = 5$:

$$x \sim y \equiv 5 \mid (x-y).$$



$$[0]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \sim x\} = \{x : 5 \mid (0-x)\}$$

$$= \{x : 5 \mid (x-0)\} =$$

$$= \{x : 5 \mid x\} = \{5 \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$x \in [1]_\sim \equiv 5 \mid (x-1) \equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(5 \cdot k = x-1)$$

$$\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(x = 5 \cdot k + 1)$$

$$[1]_\sim = \{5k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[0]_\sim = \{5k : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[1]_\sim = \{5k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[2]_\sim = \{5k+2 : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[3]_\sim = \{5k+3 : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[4]_\sim = \{5k+4 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[5]_\sim = [0]_\sim$$

$$\mathbb{Z}/\sim \; = \{0,1,2,3,4\}$$

$$\mathbb{Z} \ni x : \quad x = 5 \cdot k + i, \quad 0 \le i < 5 : \quad x \in [i]_\sim$$

$$i = [i]$$

$$\boxed{C_5 = (\{0,1,2,3,4\}, \oplus_5)}$$

KONSTRUKCJE

- $f: X \longrightarrow Y$:

  $x \sim_f y \overset{def}{\equiv} f(x) = f(y)$

  (Z) FAKT: $\sim_f$ jest rel. równoważności

  (P) Ω = zbiór zwierząt,

  $n: \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$; $n(x)$ = "ile nóg ma x"

- Arystoteles: $[\text{wilk}]_{\sim_n} = \{\omega : n(x) = 4\}$ – czworonogi

  $[\text{pingwin}]$ = ptaki i ludzie

$$p(x) = \begin{cases} 1 : & x \text{ ma pióra} \\ 0 : & x \text{ nie ma piór} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = (n(x), p(x))$$

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \times \{0, 1\}$$

$$(x \sim_{\varphi} y) \equiv (\varphi(x) = \varphi(y))$$

$$\begin{cases} [\text{pingwin}] = \text{ptaki} \\ \text{ludzie} = \{x \in \Omega : n(x) = 2 \wedge p(x) = 0\} \end{cases}$$

Arystoteles

- $f: X \longrightarrow \mathcal{U} \implies \sim_f$ – rel. równoważności,
- $\sim$ – rel. równow. na X;

$f(x) = [x]_\sim$; $f: X \longrightarrow \mathcal{U} = X/\sim$.

$f(x) = f(y) \equiv [x]_\sim = [y]_\sim \equiv x \sim y$.

MAJĄC $\sim$ MAMY f t. że $\sim = \sim_f$.