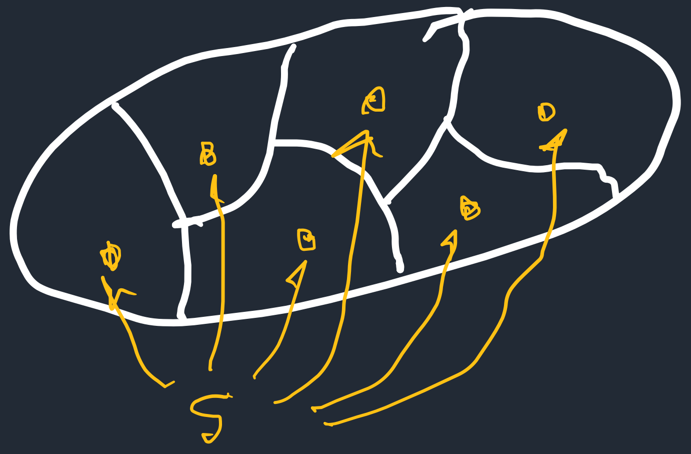
Def. Niech $\mathcal{P}$ będzie rozbiciem zbioru X.
Zbiór $S \subseteq X$ jest SELEKTOREM $\mathcal{P}$ jeśli

$$(\forall A \in \mathcal{P})(|S \cap A| = 1) \qquad (*)$$



$$(*) \equiv (\forall A \in \mathcal{P})(\exists x \in X)(S \cap A = \{x\})$$

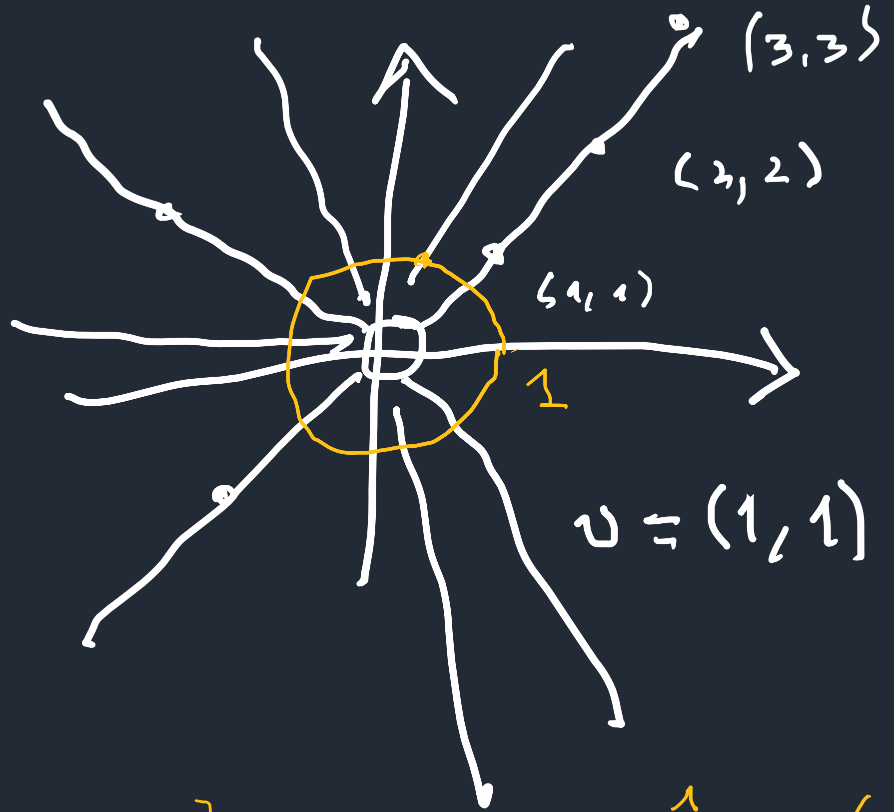
$$\boxed{\text{AKSJOMAT WYBORU (AC): Każda partycja ma selektor}}$$

PÓŹNIEJ

Przykład: na $\mathbb{R}^2$ definiujemy

$$(x,y) \sim (x',y') \overset{\text{def}}{\equiv} (\exists \underset{\mathbb{R}}{\lambda} > 0)\big(\underbrace{\lambda(x,y)}_{(\lambda x, \lambda y)} = (x',y')\big)$$

To jest rel. równoważności.



$v = (1,1)$

$$[v]_\sim = [(1,1)]_\sim = \{\lambda(1,1) : \lambda > 0\} = \{(\lambda,\lambda) : \lambda > 0\}$$

$[(0,0)] = \{(0,0)\} \rightarrow$

$[x,y] \neq (0,0)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \leftarrow$ ma długość 1

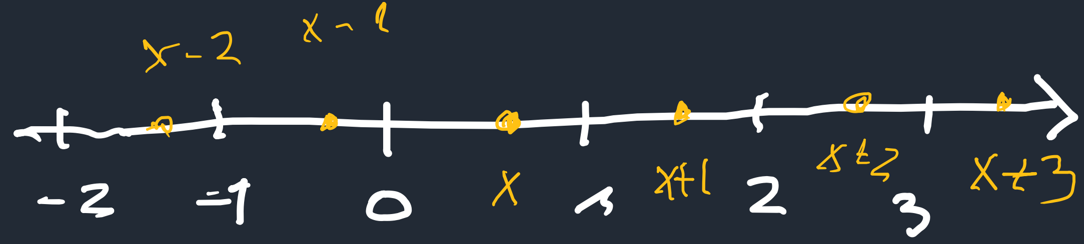
$\mathbb{R}^2/\sim \;\rightsquigarrow$

s tečkou $\quad \mathbb{R}^2/\sim$

$$S = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$$

(P) $(\mathbb{R},+)/\mathbb{Z}$

$$x \sim y \equiv x-y \in \mathbb{Z}$$
$$\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(y-x=k)$$
$$\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(y=x+k)$$



$3 \le x < 4 \quad (-3)$

$0 \le x - 3 < 1$

1) $x - 3 \sim x$

2) $x - 3 \in [0, 1)$

$x \sim (x - \lfloor x \rfloor)$

$x \sim fr(x)$

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\nexists y \in [0,1))(x \sim y)$
- $0 \le x < y < 1 \rightarrow \neg(x \sim y)$

$x \neq y$

SELEKTOR $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z} \; : \; [0, 1)$

(P) $(\mathbb{R},+)/\mathbb{Q}$: selektory $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ nazywamy zbiorami VITALEGO

DZIWNE ZBIORY.

"niemierzalny"

DEF. Relacja $\leq$ jest częściowym porządkiem na zbiorze X jeśli

1) $\leq$ jest zwrotna na X $(\forall x \in X)(x \leq x)$
2) $\leq$ jest przechodnia $(\forall x,y,z)((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z)$
3) $\leq$ jest słabo antysym. : $(\forall x,y)((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y)$

Zarzgon: $(X, \leq)$ – cz. porz. poset
$\begin{array}{l}\text{partially} \\ \text{ordered} \\ \text{set}\end{array}$

$\Updownarrow$

$\leq$ jest cz. porz. na X

(P) $(\mathbb{R}, \leq)$ – cz. porz.

uogólnienie: $A \subseteq \mathbb{R}$, $\leq_A = \leq \cap (A \times A)$

$(A, \leq_A)$ – cz. porz.

np. $A = \mathbb{N}$: $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$

$A = \mathbb{Q}$: $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$

(P) Ustalmy zbiór X,

na $P(X)$ określamy

$$A \leq B \equiv A \subseteq B$$

- $A \leq A \equiv A \subseteq A$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \longrightarrow A \subseteq C$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \longrightarrow A = B$ (Aksj. Ekstens.)

$X = \{a,b\}$; $P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, $\subseteq$

$\langle P(\{a,b\}), \subseteq \rangle$

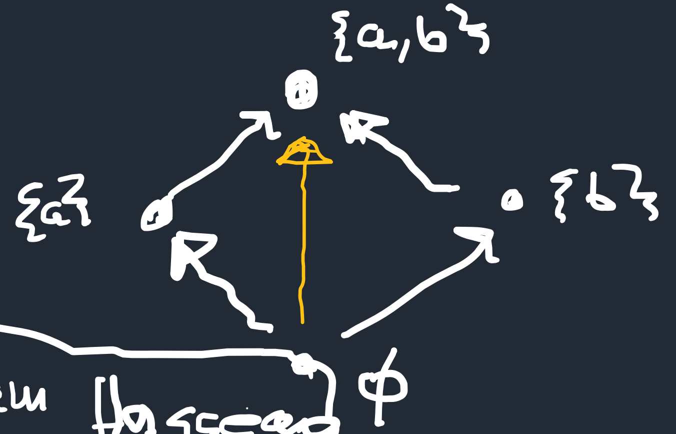
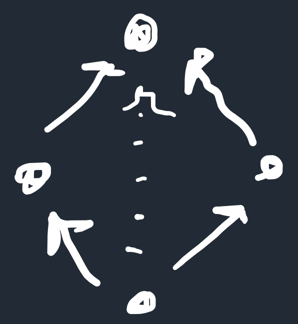


diagram Hassego



FAKT. Załóżmy, że $(X, \leq)$ jest cz. porz. Niech $Y \subseteq X$. Określmy

$$\leq_Y = \leq \cap (Y \times Y)$$

Wtedy: $(Y, \leq_Y)$ jest cz. porz.

<u>D-d</u>. 1) $y \in Y \rightarrow y \in X \rightarrow y \leq y \leftrightarrow ((y,y) \in \leq)$

$\rightarrow (y,y) \in \leq \cap (Y \times Y) \leftrightarrow y \leq_Y y.$

2) $y_1, y_2, y_3 \in Y$

$y_1 \leq_Y y_2 \wedge y_2 \leq_Y y_3 \rightarrow y_1 \leq y_2 \wedge y_2 \leq y_3 \rightarrow y_1 \leq y_3$

3) zadanie $\rightarrow y_1 \leq_Y y_3$

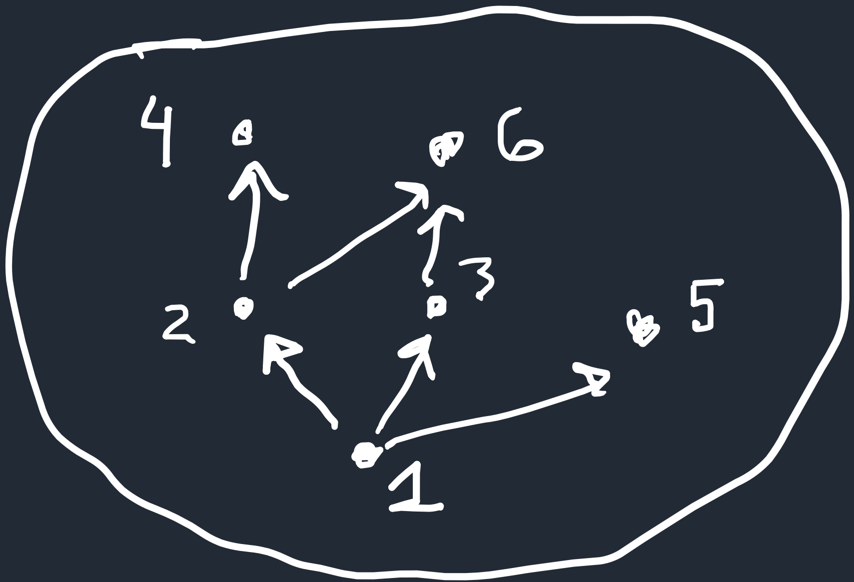
(P) $(\mathbb{N}^+, |)$

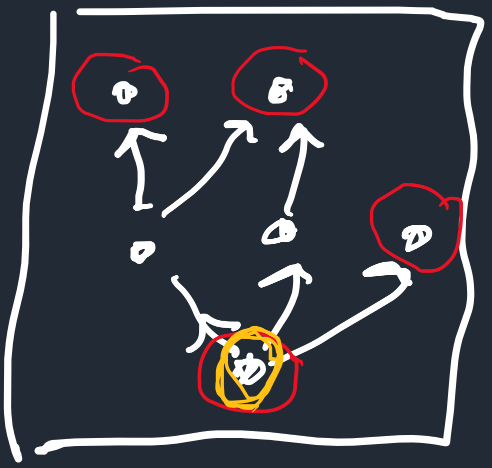
a) $x | x$

b) $x | y \wedge y | z \rightarrow x | z$

c) $x | y \wedge y | x \rightarrow x = y.$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



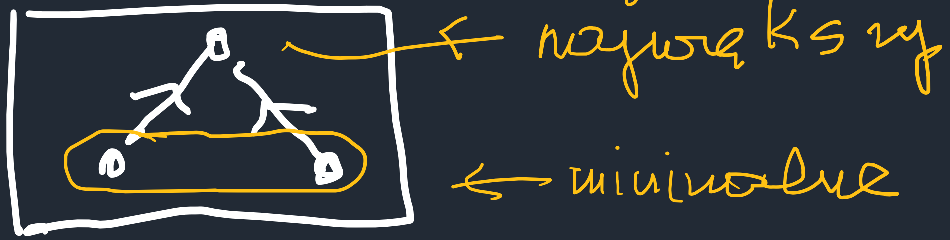


elem. maksym.

elem. najmn.

<u>Def.</u> Niech $(X, \leq)$ będzie cz. porz. oraz $a \in X$.

1) a jest <u>największy</u> w X : $(\forall x \in X)(x \leq a)$
2) a jest <u>maksymalny</u> : $(\forall x \in X)(a \leq x \rightarrow a = x)$
3) a jest <u>najmniejszy</u> : $(\forall x \in X)(a \leq x)$
4) a jest <u>minimalny</u> : $(\forall x \in X)(x \leq a \rightarrow a = x)$



FAKT. a – największy $\longrightarrow$ a – maksymalny

D-d. Zał. że a jest najw. w $(X, \leq)$.

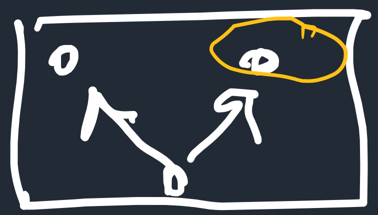
CEL: $(\forall x \in X)(a \leq x \longrightarrow x = a)$

weźmy $x \in X$ t. że $a \leq x$.

ALE: wiemy, że a jest najw. więc $x \leq a$

zatem $a = x$ $\square$

ODWROTNIE NIE:



– maks.

– największy.

FAKT. Niech $(X, \leq)$ będzie cz. porz.

Niech $\precsim$ będzie relacją na X

zdef. wzorem

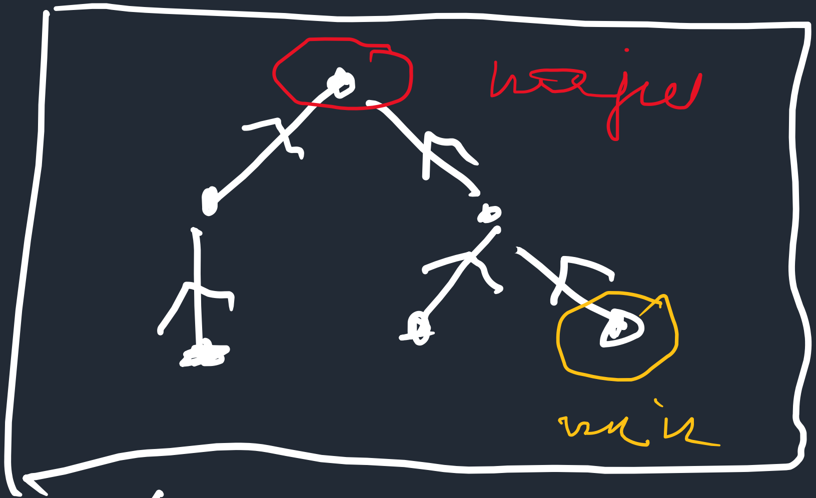
$$x \precsim y \equiv y \leq x.$$

[CZYLI: $\precsim \; = \; \leq^{-1}$]

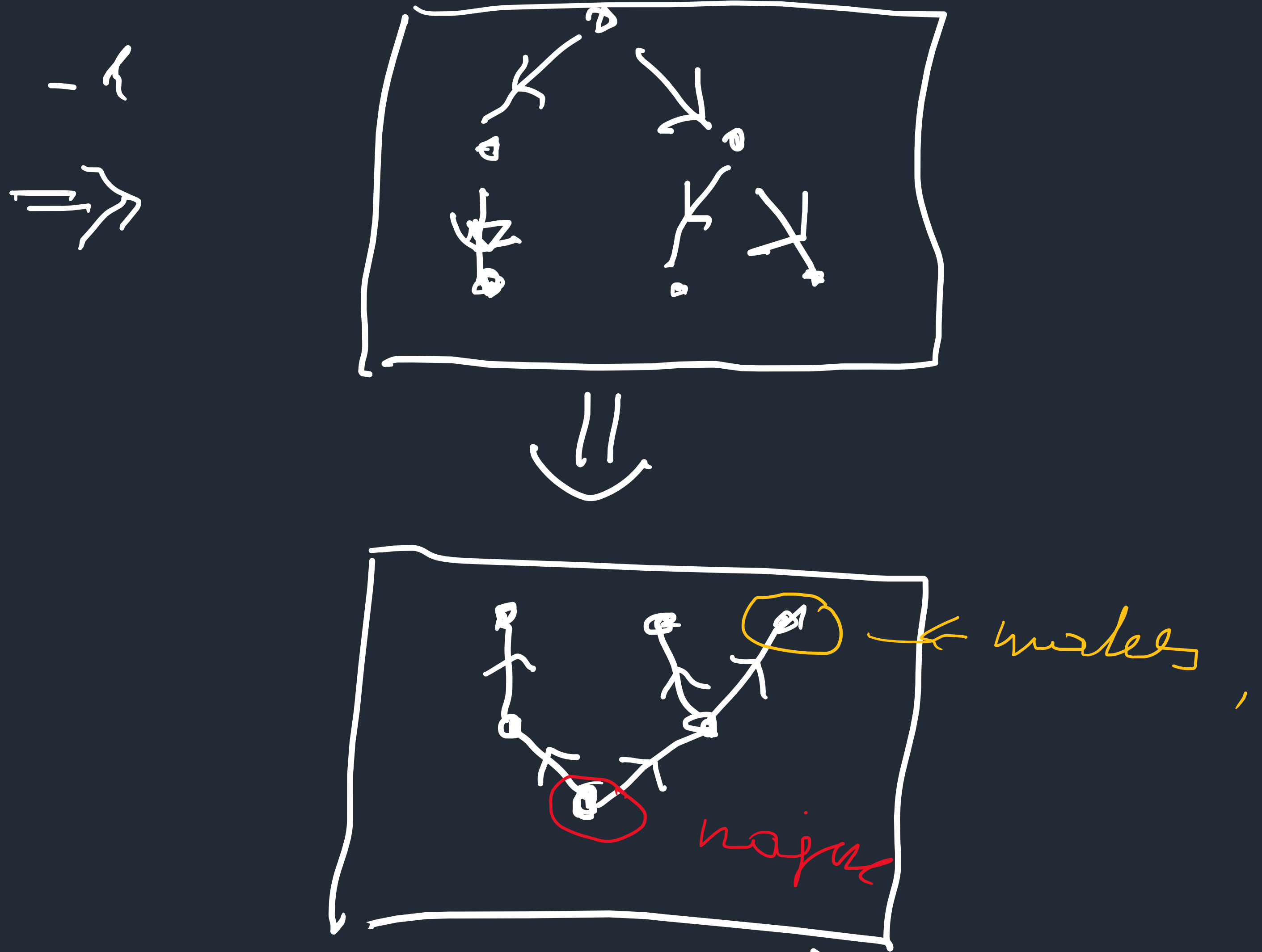
Wtedy 1) $\precsim$ - cz. porz. na X

2) dla dowolnego $a \in X$:

- a jest $\leq$-największy $\equiv$ a jest $\precsim$-najmn.
- a jest $\leq$-maks. $\equiv$ a jest $\precsim$-minimalny



$(X, \leq)$



$(X, \leq^{-1})$

D-d: zadanie

Wn. a - najmn. $\longrightarrow$ a - minimalny

D-d. (a - $\leqslant$-najmn) $\equiv$ (a jest $\leqslant^{-1}$-największy)

$$\Downarrow$$

(a jest $\leqslant$-minimalny) $\equiv$ (a jest $\leqslant^{-1}$-maksym)

PRODUKT CZ. PORZ.

$(X, \leqslant_1)$, $(Y, \leqslant_2)$ - cz. porządki.

na $X \times Y$ określamy

$$(x,y) \leqslant (x',y') \equiv (x \leqslant_1 x') \land (y \leqslant_2 y')$$

FAKT $(X \times Y, \leq)$ - cz. porz.

D-d.

- $(x,y) \leq (x',y') \wedge (x',y') \leq (x'',y'')$

$$\Updownarrow$$

$$(x \leq_1 x' \wedge y \leq_2 y') \wedge (x' \leq_1 x'' \wedge y' \leq_2 y'')$$

$$\Downarrow$$

$$x \leq_1 x'' \wedge y \leq_2 y''$$

$$\Updownarrow$$

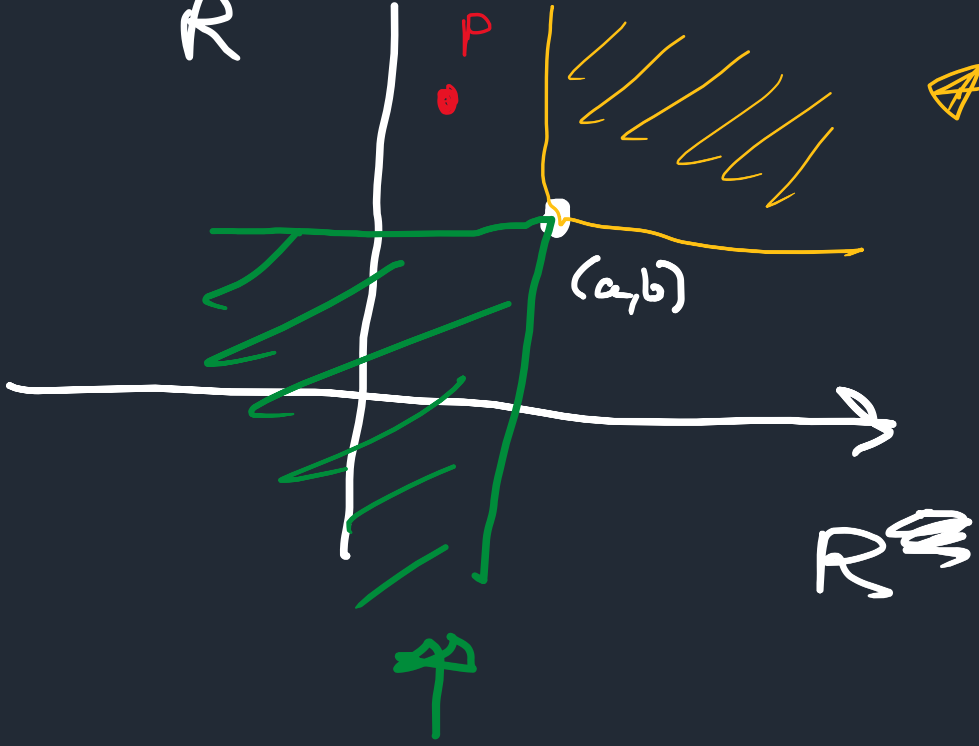
$$(x,y) \leq (x'',y'')$$

przech.!

Reszta: zadanie

P Na $\mathbb{R}^2$ rozważmy relację

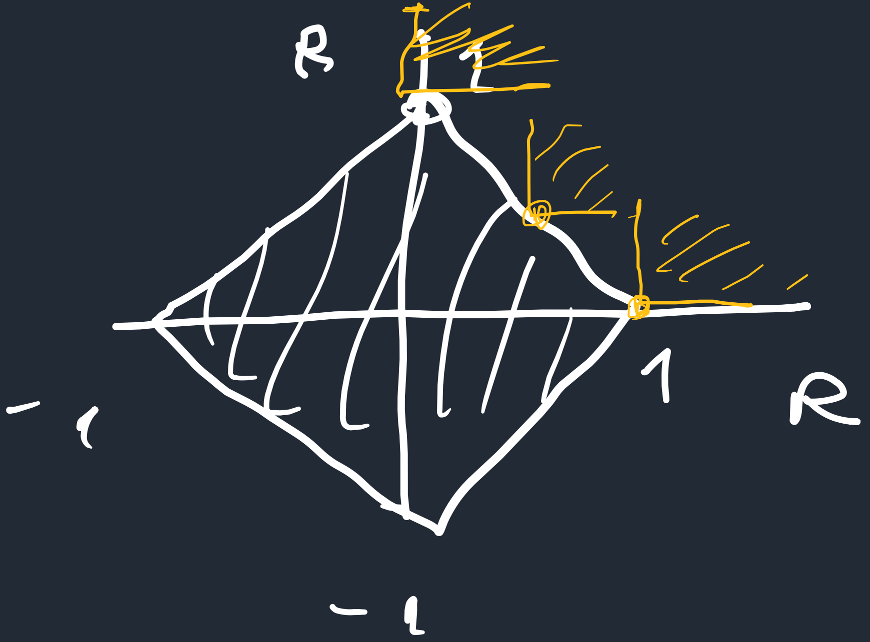
$$(x,y) \le (x',y') \equiv (x \le x') \wedge (y \le y')$$



$$\{(x,y) : (a,b) \le (x,y)\}$$
$$=$$
$$\{(x,y) : a \le x \wedge b \le y\}$$
$$=$$
$$[a,\infty) \times [b,\infty)$$

$$\{(x,y) : (x,y) \le (a,b)\}$$

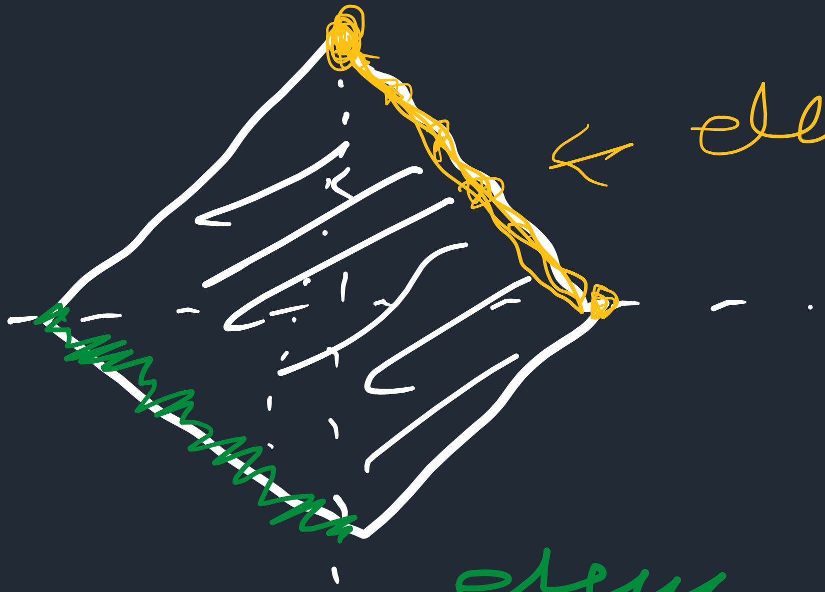
P i (a,b) – nieporównywalne



$A = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}$

Rozważmy

$(A, \leq_A)$



elem. maksymalne

ekstrema Pareto

elem. minimalne