Indukcja matematyczna

P1

$$\boxed{1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad n\geq 1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

D-d 1.

$\varphi(n) =$ "$1+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$"

$a = 1$

K1 $\quad \varphi(1) = 1$

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1 \quad \square$$

K2 $\quad \varphi(n) \longrightarrow \varphi(n+1)$

Zał. że $\varphi(n)$ jest prawdziwe.

Musimy pok. że $\varphi(n+1)$ jest prawdziwe.

czyli $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$!!!

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1+2+\ldots+n+(n+1) = (1+2+\ldots+n)+(n+1) \overset{\text{zał. ind.}}{=}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+\frac{2}{2}\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \square$$

Zatem, na mocy ind. mat. mamy

$$(\forall n \geq 1)\left(\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\right) \quad \blacksquare$$

D-d (2) Dla $n=1$ mamy $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Jeśli $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, to

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{zał. ind.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

więc na mocy zasady ind. mat. tw. jest prawdziwe.

Zadania

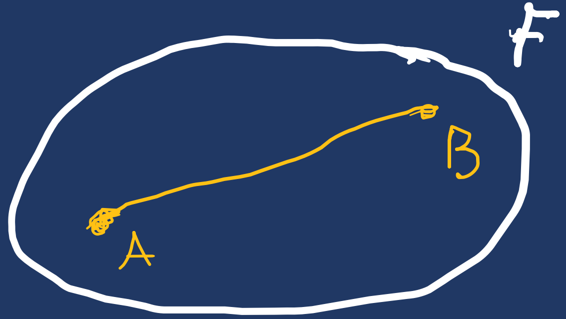
P1 $\quad 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

P2 $\quad 1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

P2 geometryczny

F – n-kąt wypukły ; $n \geq 3$

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

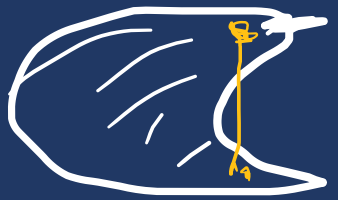


wypukła

• $n=3$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ$$

!!!

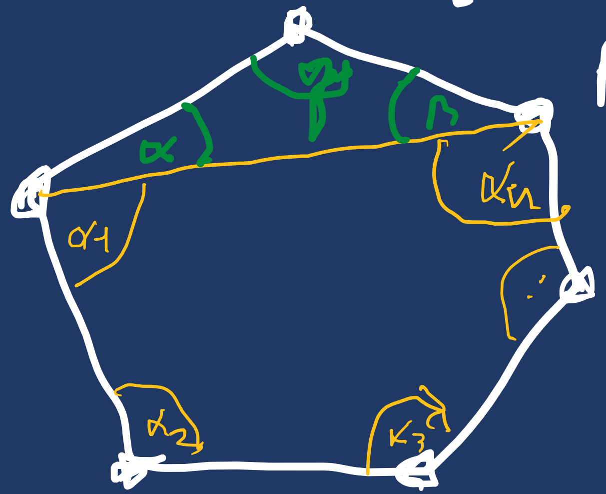


$\neg$wypukła

Pytanie: czy założenie wypukłości jest potrzebne?

• zał. że dla n-kątów to jest prawdziwe

Rozw. $(n+1)$-kąt wypukły



Z zał. ind. $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = (n-2)180°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Suma kątów wewn.:

$$(\alpha + \alpha_1) + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + (\alpha_n + \beta) + \gamma$$

$$= (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) + (\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= (n-2)180° + 180° = (n-2+1)180° =$$

$$= ((n+1) - 2) \cdot 180° \quad \blacksquare$$


: $(3-2)180°$


: $(4-2) \cdot 180°$

(P3) Analiza mat.

$$\begin{cases} (1+x)^n \geq 1+nx & (*) \\ x \geq -1, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

nierówność Bernoulliego

D-d (n=1) $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+1\cdot x$

- Zał. że n jest ok.

wtedy

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \overset{\text{zał. ind.}}{\geq} (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$$

$$\geq 1+(n+1)x \quad \square$$

- z zasady ind. mat. wynika prawdz. (*) dla dow. n, IND. MAT : bardzo silne narzędzie

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Inny dowód:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

$(+)$

$$2 \cdot S = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) =$$
$$= n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{\text{GAUSS}}$

$1 + \ldots + 100$

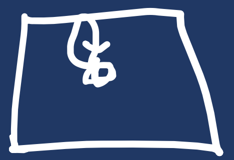
$S = \frac{\cancel{100 \cdot 99}}{\cancel{2}} \quad \frac{101 \cdot 100}{2}$

Tw. Zał. że $(X, \le)$ jest skoń. cz. porz. ($X \neq \emptyset$) wtedy istnieje $a \in X$ t. że a jest $\le$-maks.

P w $(\mathbb{N}, \le)$ nie ma elem., maksymalnego

D-d. Indukcją po $|X|$.

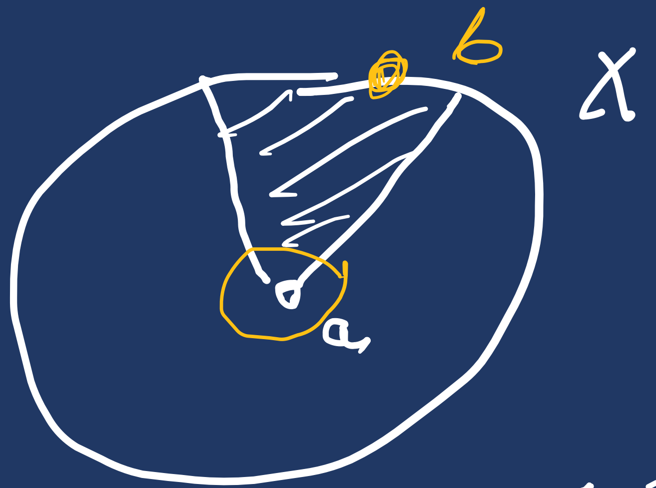
- $|X| = 1$; $X = \{a\}$; a - maks. w $\le$.



- Zał. że tw. jest prawdz. dla wszystkich cz. porz. mocy $\le n$.

Pok. że tw jest prawdz. dla wszyst. cz. porz mocy $\le n+1$.

Weźmy cz. porz. $(X, \le)$ t. że $|X| \le n+1$.



Niech $a \in X$

- a jest maks. w $(X, \leq)$ to koniec.
- zał. że a nie jest $\leq$-maks.

Niech $Y = \{x \in X : a \leq x \wedge a \neq x\}$

Z zał. $Y \neq \emptyset$.

Patrzymy na $(Y, \leq \restriction Y)$. To jest cz. porz.

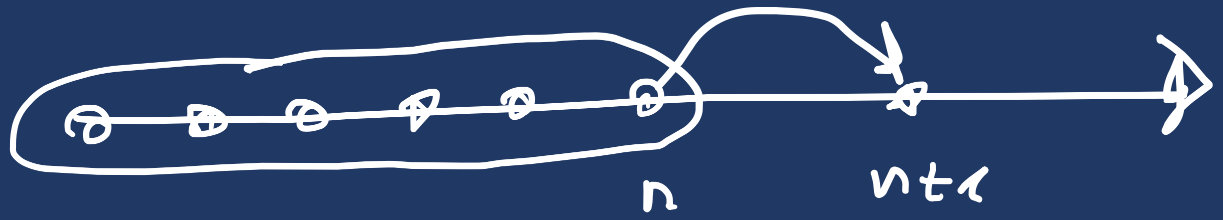
$|Y| \leq |X| - 1 \leq (n+1) - 1 = n$.

Jest (zał. ind.) element $\leq$-max b w $(Y, \leq)$

Wtedy b jest maks. elem. w $(X, \leq)$ $\square$

Schemat:

$$(\forall k \le n)\, \varphi(k) \longrightarrow \varphi(n+1)$$



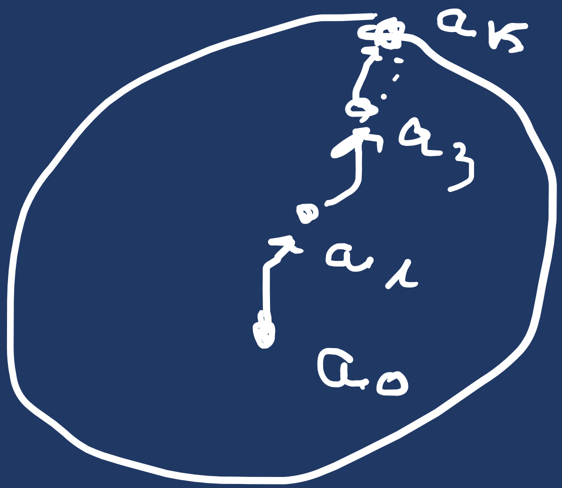
<u>Zadanie</u>: udow. popr. tego schematu

że schemat

$$\underset{n}{\psi(n)} \longrightarrow \psi(n+1)$$

Wsk. $\psi(n) = \bigwedge_{k=1}^{n} \varphi(k)$

Uwaga algorytmiczna



$(X, \leq)$

szukanie elem. maks.

- bierzemy $a \in X$.
  $a_0 = a$.
- $a_k \longrightarrow a_{k+1}$

if (a_k jest $\leq$-max) { return a_k }

else { a_{k+1} = jakiś element większy od a_k }

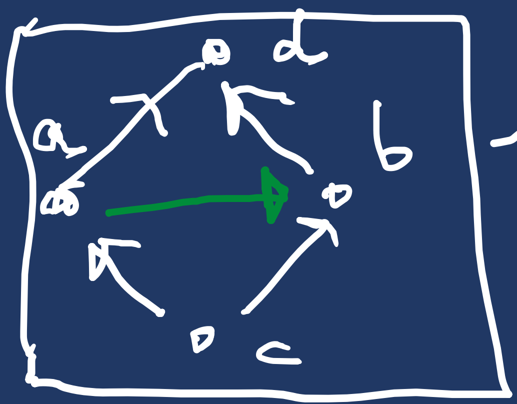
Tw. Zał. że $(X, \leq)$ jest cz. porz. skończonym.
Istnieje liniowy porządek R t. że

$$(\forall x,y \in X)\,(x \leq y \longrightarrow xRy)$$

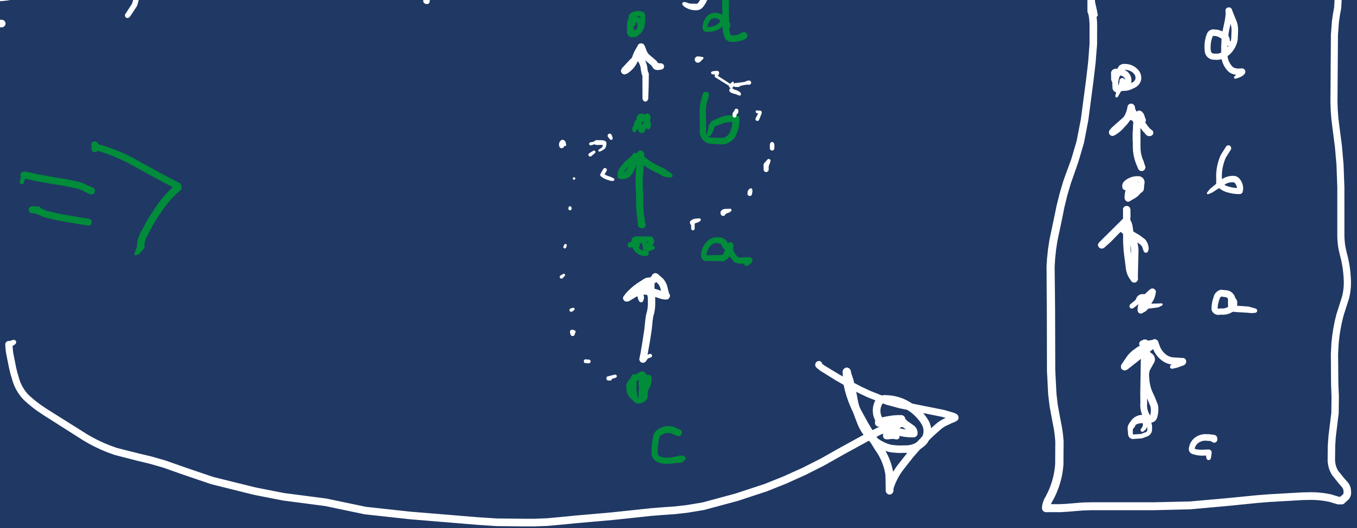
$$\big((x,y) \in \leq \;\longrightarrow\; (x,y) \in R\big)$$

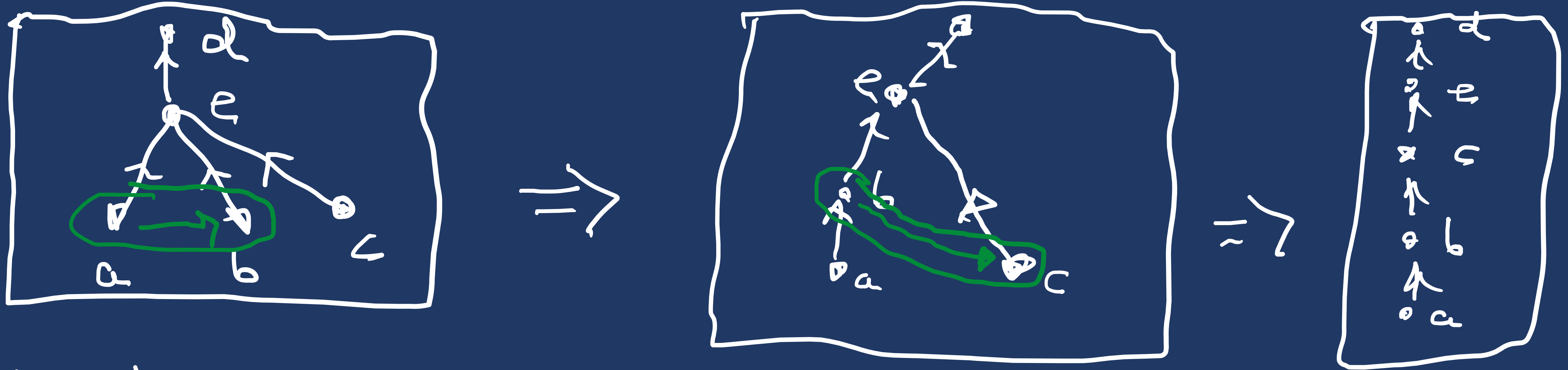
$[\leq \subseteq R]$

(P)



a, b – nieporównywalne





D-d. Ustalmy sk. cz. porz. $(X, \leq)$.

$\mathcal{R} = \{ R \subseteq X \times X : R$ - cz. porz. na X i $\leq \subseteq R \}$

- $\mathcal{R} \neq \emptyset$ (bo $\leq \in \mathcal{R}$)
- $\mathcal{R}$ jest skończ.

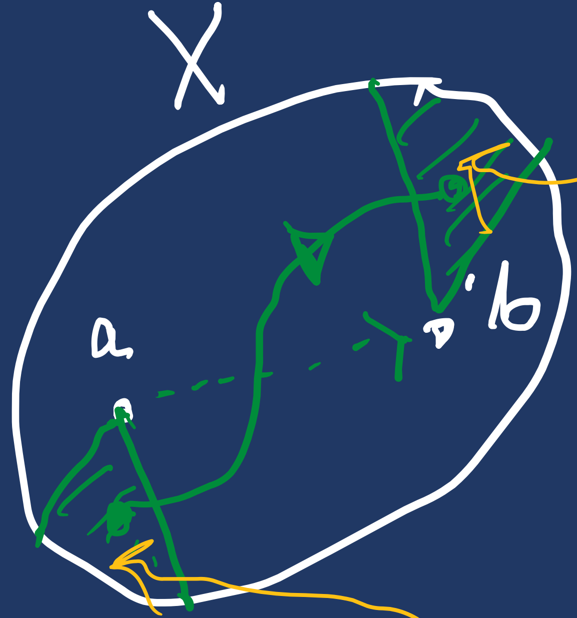
$(\mathcal{R}, \subseteq)$ - skończ. cz. porządek

- W $(\mathcal{R}, \subseteq)$ jest element maks. L.

zadanie: co by się stało gdyby dodać $c \to b$ w drugim kroku?

CLAIM: L jest lin. porz.

Zał. że L nie jest lin. porz.



Są $a, b \in X$ t. że

$\neg(aLb \vee bLa)$

czyli $\neg(aLb) \wedge \neg(bLa)$

Niech $L^* = L \cup (\{x \in X : x \leq a\} \times \{y \in X : b \leq y\})$

<u>Zadanie</u>: <u>L^* jest cz. porz.</u>: 1) $L^* \subseteq X \times X$ 2) $L^* \supseteq \geq$. <u>SPOZ</u>

ALE $L \subsetneq L^*$ (bo $(a,b) \in L^* \setminus L$). WIĘC L nie jest $\subseteq$-maks.

PO WYKŁADZIE

CH

$\boxed{\mathfrak{c} = \aleph_1}$

$$\mathfrak{c} = |P(\mathbb{N})| \quad (= |\mathbb{R}|)$$

$$\beth_0 = \mathfrak{c}$$

$$\beth_{n+1} = |P(\beth_n)|$$

$$\beth_0 = |P(N)|$$

$$\beth_1 = |P(P(N))|$$

$$\beth_2 = |P(P(P(N)))|$$

$\vdots$

$$\beth_0 < \beth_1 < \beth_2 < \beth_3 < \beth_4 < \dots$$

$$\lim_{n \to \infty} 2^{(2^n)} = \aleph_0$$

$X_0 = \{a, b\}$ ← słowa

$X_1 = P(X_0)$ ← $X_2 = PP(X_0), \dots$

$$\left|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\right| = \aleph_0$$