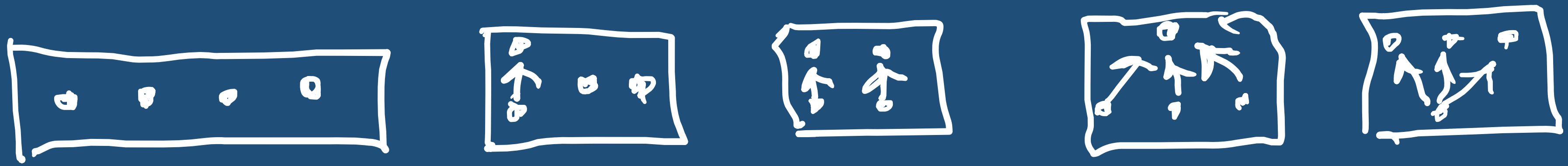
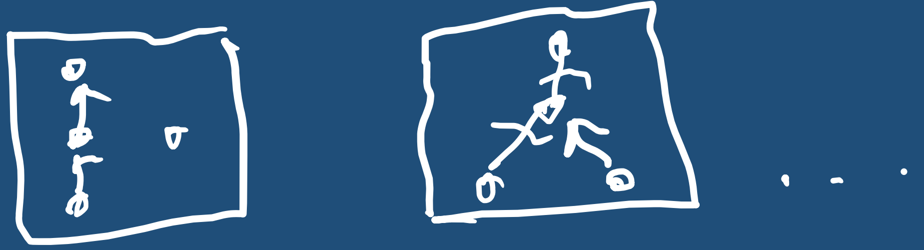
Częściowe porz. na zbiorze 4 elem. z dokł. do IZOMORFIZMU





16 możliwości $n = 4$

n	L_n
1	1
2	2
3	5
4	16
⋮	
16	....

Uwaga: 'naiwne podejście"

$n = 10$: $X = \{1, .., 10\}$

Relacje na X:

$R \subseteq X \times X$

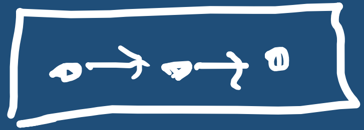
- $|X \times X| = 100$
- $|P(X \times X)| = 2^{100} \approx 10^{33}$

Tw. Jeśli $(L, \leqslant)$ jest lin. porz., $|L| = n$.

Wtedy $(L, \leqslant) \underset{\text{IZO}}{\cong} (\{0, \ldots, n-1\}, \leqslant)$.

---

czyli: $\boxed{\begin{array}{ccccc} \bullet \to & \bullet \to & \bullet & \ldots & \bullet \to \bullet \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \end{array}}$



$L = \{1, 2, 3\}$

$3!$

$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \bullet \to & \bullet \to & \bullet \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ \bullet \to & \bullet \to & \bullet \end{array}$

$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 2 \\ \bullet \to & \bullet \to & \bullet \end{array} \qquad \vdots$

D-d. $n = 0$: $(\emptyset, \emptyset)$

$n = 1$: $(\{a\}, \{(a,a)\})$ $\quad D_a$

$\cong$

$(\{a\}, \leqslant)$

• zał. że jest OK dla $(L, \ )$ t. że $|L| = n$,

$\boxed{n \leadsto n+1}$

zał. że $(L, \preccurlyeq)$ ma $n+1$ elem.

niech $a \in L$ będzie $\preccurlyeq$-minim.

wtedy a jest najmn. w $\preccurlyeq$,

$$L^* = L \setminus \{a\}$$

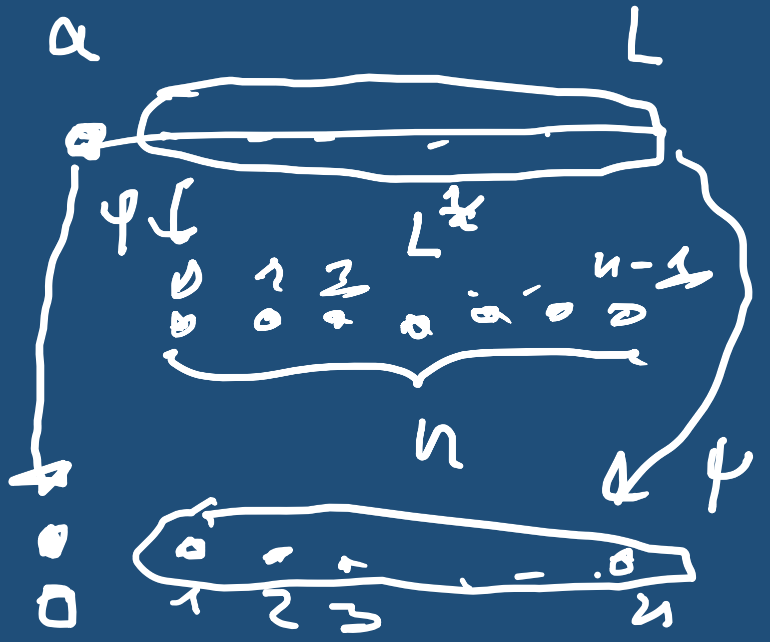
$|L^*| = n$ $\qquad \varphi : L^* \xrightarrow{IZO} \{0, .., n-1\}$

$\psi(x) = \varphi(x) + 1$

niech

$$\psi^* = \psi \cup \{(a, 0)\}$$

$\psi^* : L \xrightarrow[na]{1-1} \{0 .. n\}$ IZO $\blacksquare$



algor.

Tw. Zał. że $|X| = |Y| = n \ (\in \mathbb{N})$. Niech $f: X \to Y$

wtedy $\Leftrightarrow$

1) $f: X \xrightarrow{1-1} Y$

2) $f: X \xrightarrow{na} Y$.

(P) $X = Y = \mathbb{N}$ $\quad |X| = |Y| \ (= \aleph_0)$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \to n+1$

- f jest 1-1
- f nie jest "na"

czyli: założenie skończoności jest potrzebne!

D-d. Możemy zał. że $X = Y = \{1, \dots, n\}$,

Q: dlaczego

$f : X \to Y$.

(1) $f : X \xrightarrow{1-1} Y \Rightarrow f : X \xrightarrow{na} Y$

• $(n = 1)$ $f : \{1\} \to \{1\}$ ok.

• zał. że dla n jest ok.

$f : \{1, \dots, n+1\} \xrightarrow{1-1} \{1, \dots, n+1\}$

niech $a = f(n+1) \in \{1, \dots, n+1\}$

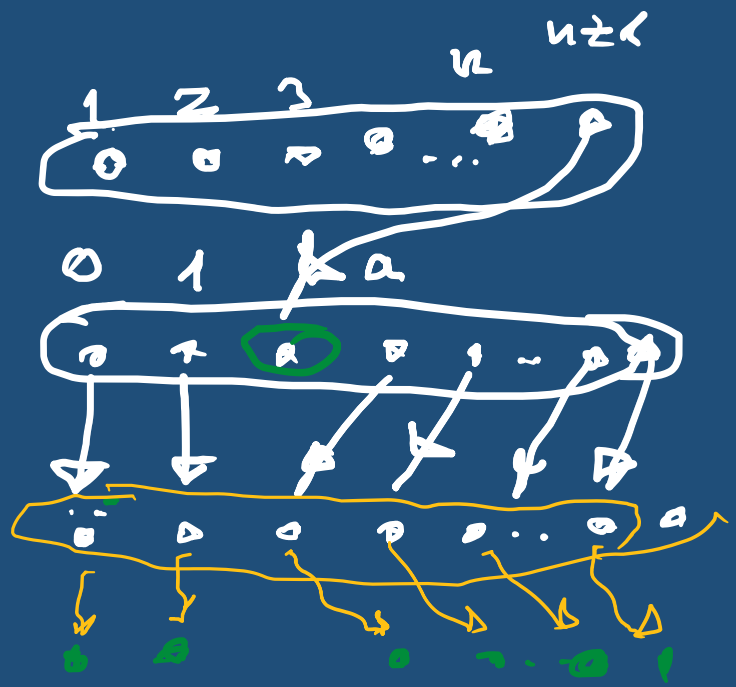
$\psi : \{1, \dots, n+1\} \setminus \{a\}$

$$\psi(x) = \begin{cases} x : x < a \\ x - 1 : x > a \end{cases}$$

$\psi : \{1, \dots, n+1\} \setminus \{a\} \xrightarrow{1-1} \{1, \dots, n\}$

ψ jest "na"

więc f jest na $\{1, \dots, n+1\}$



(2) $f:\{1,\dots,n+1\} \xrightarrow{\text{na}} \{1,\dots,n+1\}$

$f^* = f \restriction \{1,\dots,n\}$

$f^*: \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n+1\}$

$\tilde{f} = f \restriction \big(\underbrace{\{1,\dots,n+1\} \setminus f^{-1}(\{a\})}_{X}\big)$

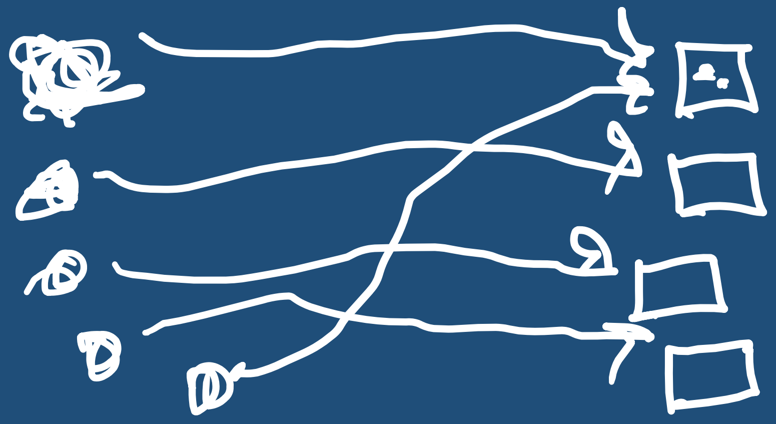
$f: \{1,\dots,n+1\} \setminus X \xrightarrow{\text{na}} \{1,\dots,n+1\} \setminus \{a\}$

obst. po ind.

FAKT: $\left.\begin{array}{l}|X| = n,\ |Y| = m,\ n > m \\ f: X \longrightarrow Y\end{array}\right\} \Rightarrow f$ nie jest 1-1

(P) $\left(f: \{1, .., 5\} \longrightarrow \{1, .., 4\}\right) \Rightarrow \exists x, y \in \{1 \ldots 5\}$
$f(x) = f(y)$

Zasada gołębnika:



$\boxed{\text{ZASADA DIRICHLETTA}}$

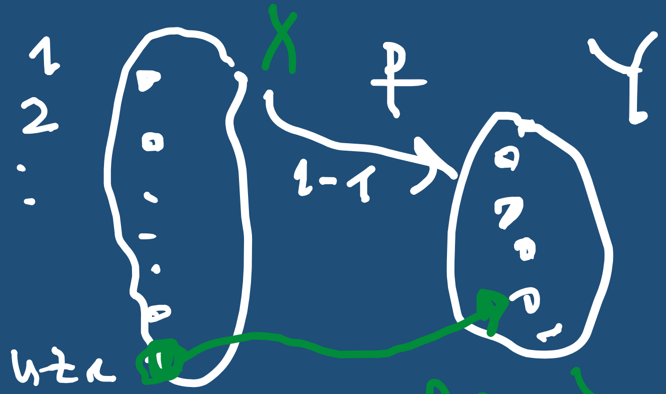
D-d. wystarczy pok. że $|X| = n+1$, $|Y| = n$
i $f: X \to Y$ to f nie jest "na".

• $n = 1$ $\quad f : \{a, b\} \longrightarrow \{c\}$

$$f(a) = c = f(b) \quad \blacksquare$$

KOLIZJA

• $n \rightsquigarrow n+1$:



n-elem.

$a = f(n+1)$

$X^* = X \setminus \{n+1\}$

$$f|X^* : X^* \xrightarrow{1-1} \underbrace{Y \setminus \{a\}}_{Y^*}$$

$$|X^*| = n > |Y^*|$$

$$f|X^* : X^* \xrightarrow{1-1} Y^*$$

sprz. z zał. ind.

Tw. Indukcje motem

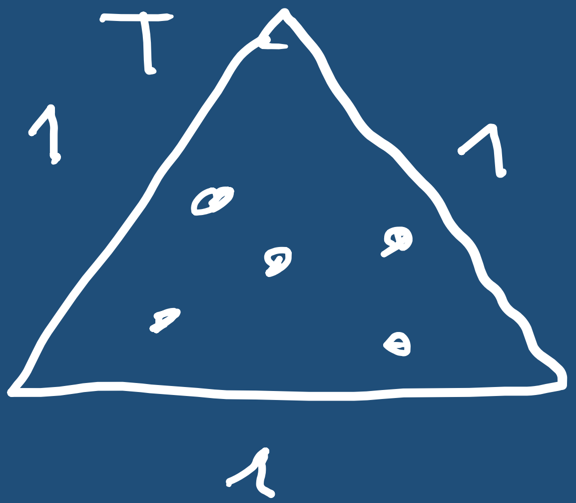
|||

zwobowe

ZADANIE
• www ← hint

$$(\forall n,m)\,(n>m \to [\forall f: \{1..n\} \to \{1..m\}]\,(\exists x,y \in \{1,..n\})\,(f(x)=f(y)))$$

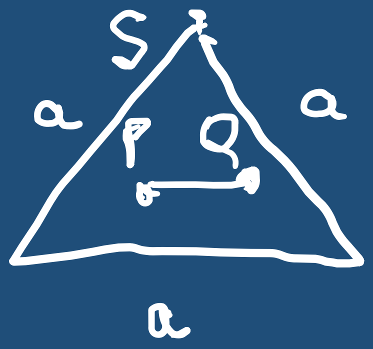
P



$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in T$

Istnieją $1 \le i < j \le 5$ t. że

$$d(P_i, P_j) \le \frac{1}{2}.$$

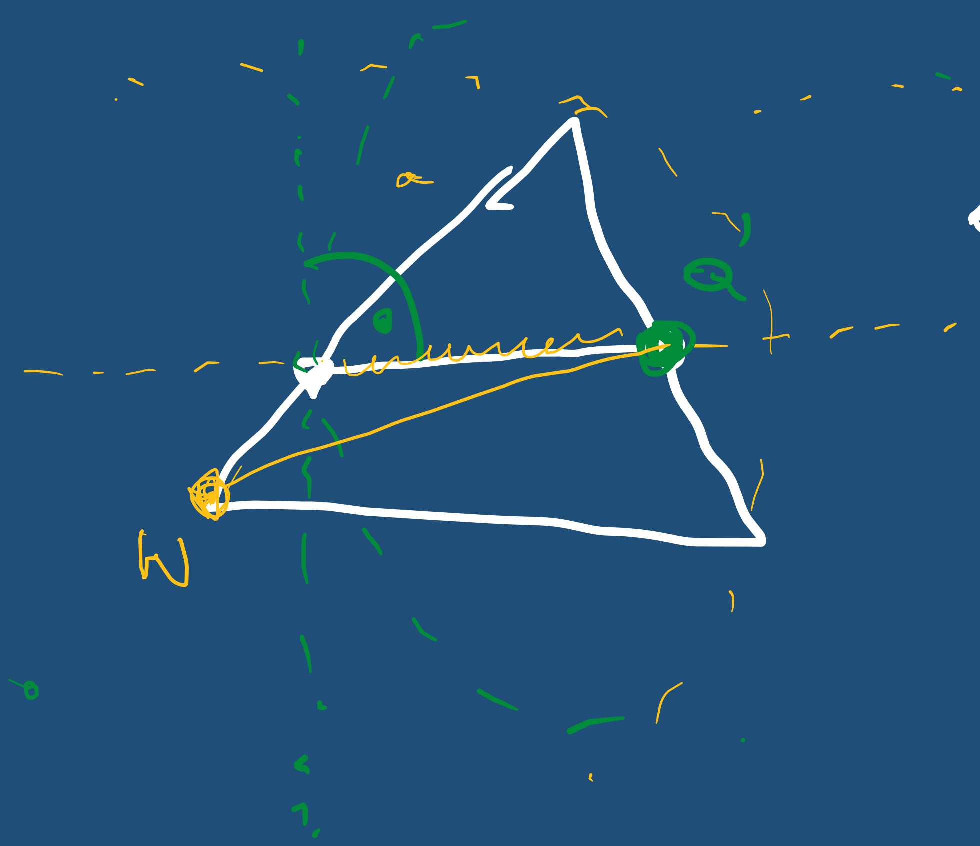


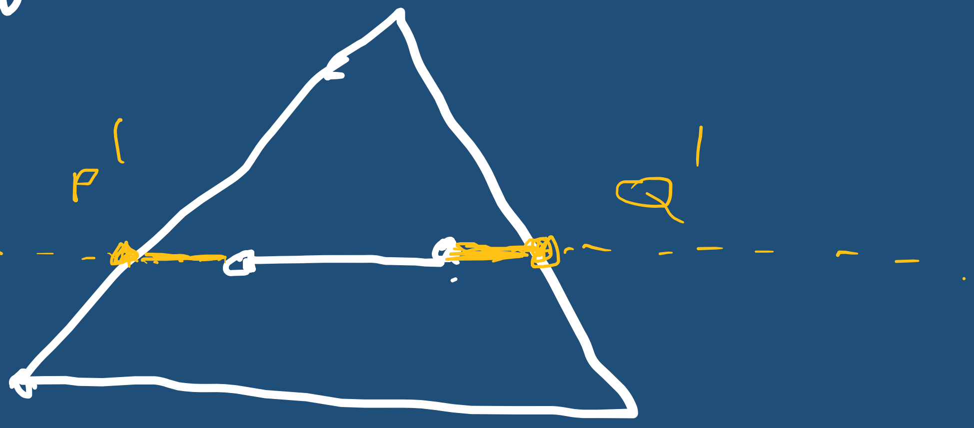
S – Δ równ. o boku a

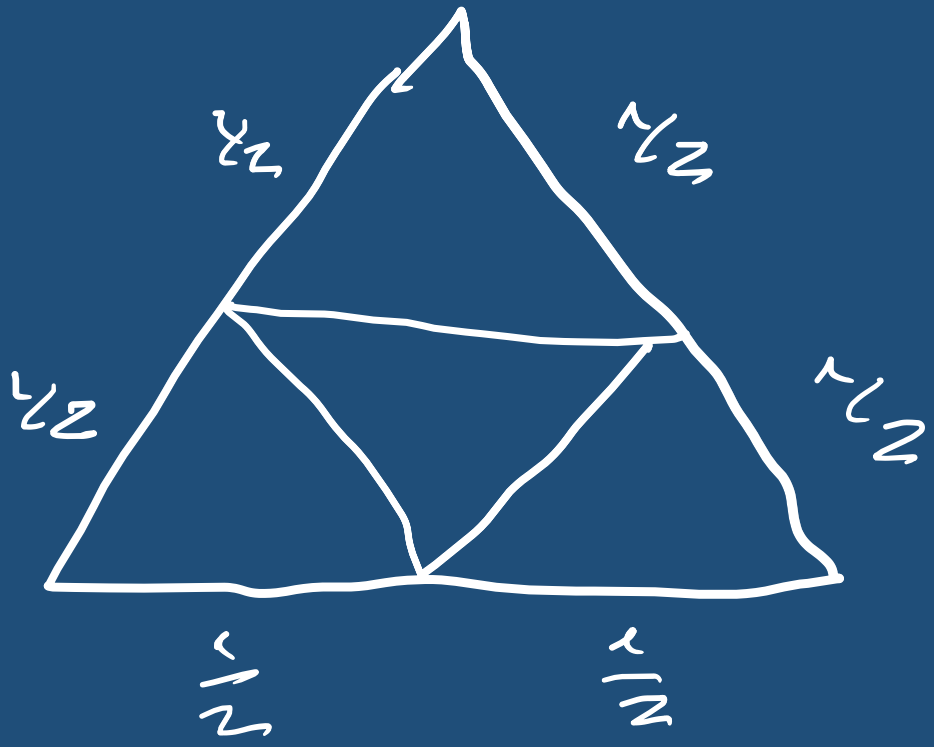
$P, Q \in S$

wtedy $d(P,Q) \leq a$.

Zrób to.



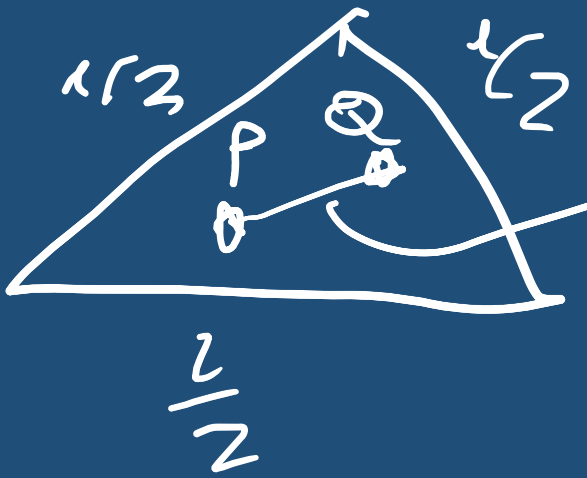




$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ rozł.

$P_1, \ldots, P_5 \in T$

Są dwa punkty w tym samym małym trójk.

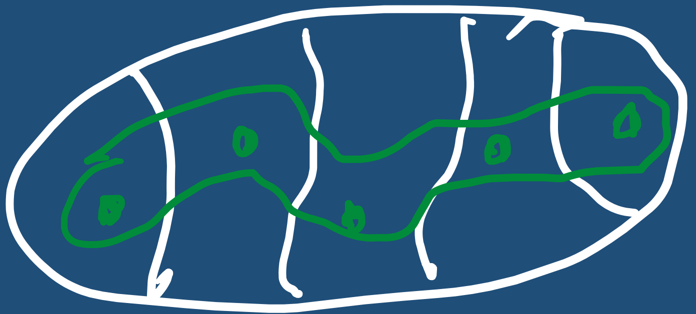


odl. $\leq \frac{1}{2}$.

AKSJOMAT WYBORU (Axiom of choice)

AC

Każda partycja ma selektor



Uwaga: $\mathcal{P} = \{P_1, .., P_n\}$

$P_i \neq \emptyset$, $P_i \cap P_j = \emptyset$ dla $i \neq j$,

to istnieje selektor

skończony

(nie potrz. tutaj AC).

$P_1 \neq \emptyset \longrightarrow \exists x_1 \in P_1$

$\vdots$

$P_n \neq \emptyset \longrightarrow \exists x_n \in P_n$

$S = \{x_1, .., x_n\}$

S - selektor.

Oznaczenie: A^B = rodz. wszystkich funkcji z B do A

$$A^B = \{ f \subseteq B \times A : f \text{ jest funkcją } \wedge \operatorname{dom}(f) = B \}$$

(Z) $\emptyset^{\emptyset} = ?$ $\left| \begin{array}{l} X^{\emptyset} = ? \\ X \neq \emptyset \end{array} \right|$

(P) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ← wszystkie ciągi liczbowe

Każdy $\underset{a}{\overset{a=}{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}}}$ ciąg liczb rzecz.

$a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Def. Niech $(A_t)_{t\in T}$ będzie ind. rodz. zb.

$$\prod_{t\in T} A_t = \left\{ f\in \Big(\bigcup_{t\in T} A_t\Big)^T : (\forall t\in T)\big(f(t)\in A_t\big)\right\}$$

P $\quad A_1=A_2=A_3=A_4=\{0,1\}$

$$\prod_{t\in\{1..4\}} A_t \ni f \quad ; \quad f: T\longrightarrow\{0,1\}$$

$$f:\{1,2,3,4\}\longrightarrow\{0,1\}$$

$$\prod_{t\in\{1..4\}}\{0,1\} = \Big\{\underbrace{\{(1,i_1),(2,i_2),(3,i_3),(4,i_4)\}}_{\substack{\cong\\(i_1,\, i_2,\, i_3,\, i_4)}} : i_1,..,i_4\in\{0,1\}\Big\}$$

Tw. AC $\equiv$ dla dowolnej rodziny $(A_t)_{t\in T}$ t. że $T\neq\emptyset$ i $(\forall t\in T)(A_t\neq\emptyset)$

mamy $\prod_{t\in T} A_t \neq \emptyset$.

D-d: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A}=(A_t)_{t\in T}$

niech $A_t^* = \{t\}\times A_t$; $\{A_t^*\}_{t\in T}$ jest partycją

no to ma selektor

f - sel. $\{A_t^*\}_{t\in T}$: CHECK! $f\in\prod_{t\in T} A_t$.

($\Leftarrow$) mamy $\mathcal{P}$ – będące rozbiciem X.

Jak zrobić z $\mathcal{P}$ rodzinę indeks S.

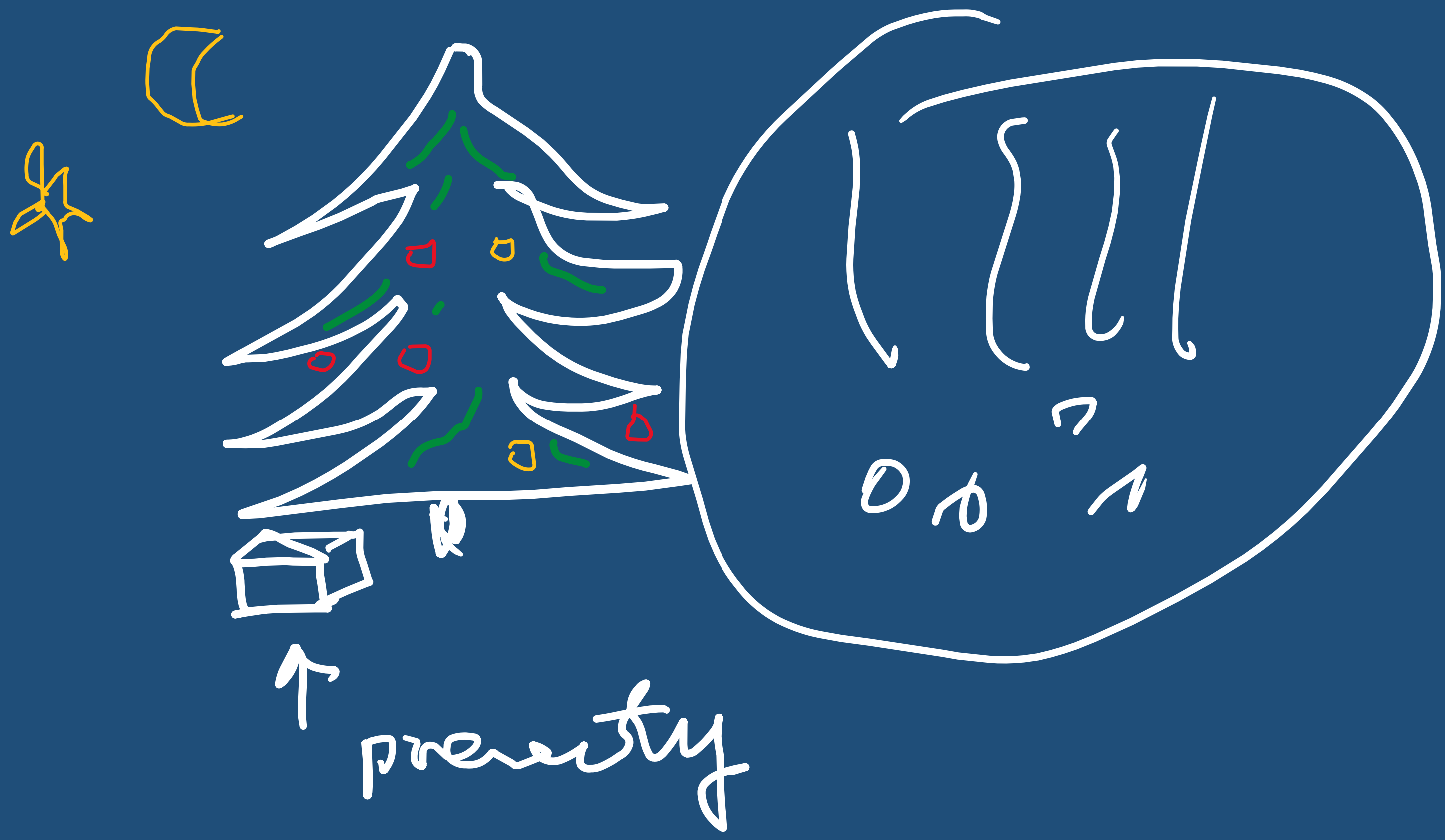
Dla $P \in \mathcal{P}$ określamy $A_P = P$

stosujemy założenie dla rodziny

$$(A_P)_{P \in \mathcal{P}} \quad !!!$$

To znajdziemy $f \in \prod_{P \in \mathcal{P}} A_P$

i def $S = \operatorname{rng}(f)$. <u>CHECK IT</u>


presents