Aksjomat wyboru (AC)

$\mathcal{A} = (A_t)_{t\in T}$

niepuste + parami rozłączne

$\Rightarrow$ istnieje S t.że

$(\forall t\in T)(|A \cap S| = 1)$

AC $\equiv$ jeśli $(A_t)_{t\in T}$ jest rodziną niepustych zbiorów,

to istnieje $\varphi \in \prod_{t\in T} A_t$, czyli

istnieje funkcja φ t.że

1) $\mathrm{dom}(\varphi) = T$

2) $(\forall t\in T)(\varphi(t)\in A_t)$

// $\varphi \leftarrow$ funkcja wyboru

ZASTOSOWANIE AC

Tw. (AC) Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\in\mathbb{R}$. ⟺

1) $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R})(|x-g|<\delta\to|f(x)-f(g)|<\varepsilon)$
[Cauchy]

2) dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t. że
$\lim_{n\to\infty}x_n=g$ mamy $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(g)$
[Heine]

$(2)\equiv f(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$.

D-d. $(1)\to(2)$
nie wymaga AC.

$(2) \to (1)$ nie wprost. zał. że $\neg(1)$, czyli

$$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x)\neg\big(|x-g|<\delta \to |f(x)-f(g)|<\varepsilon\big)$$

$$\neg(p\to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$$

czyli

$$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x)\big(|x-g|<\delta \wedge |f(x)-f(g)| \geq \varepsilon\big).$$

ustalmy takie ε, że ...., za δ podst. liczby $\frac{1}{n}$ $(n \in N^+)$

niech $A_n = \{x \in R : |x-g| < \frac{1}{n} \wedge |f(x)-f(g)| \geq \varepsilon\}$.

- $A_n \neq \emptyset$ dla wszyst. $n \in N^+$.

Mamy a t. że 1) $\mathrm{dom}(a) = N^+$ 2) $(\forall n \in N^+)(a(n) \in A_n)$.

Niech $a_n = a(n)$. $(a_n)_{n \geq 1}$ – ciąg liczb rzecz.

- $|a_n - g| < \frac{1}{n}$; $\lim_n a_n = g$
- $|f(a_n) - f(g)| \geq \varepsilon$ $(\forall n \in N^+)$, czyli $\neg \lim f(a_n) = f(g)$

CZYLI $\neg(2)$ ■

WOP (well-ordering principle).

Każdy zbiór można dobrze uporządkować.

Tw $AC \Longleftrightarrow WOP$

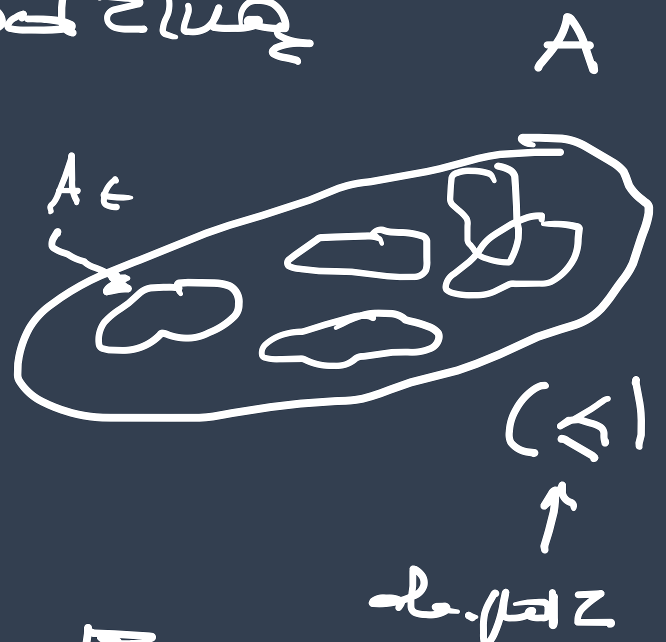
D-d. ($\Leftarrow$) Niech $\mathcal{A} = (A_t)_{t\in T}$ będzie rodziną zbiorów $\neq \emptyset$. Niech $A = \bigcup_{t\in T} A_t$.

Niech $\preccurlyeq$ będzie dobrym porz. na A.

Dla $t \in T$ określamy:

$$\varphi(t) = \preccurlyeq\text{-min}\,(A_t).$$

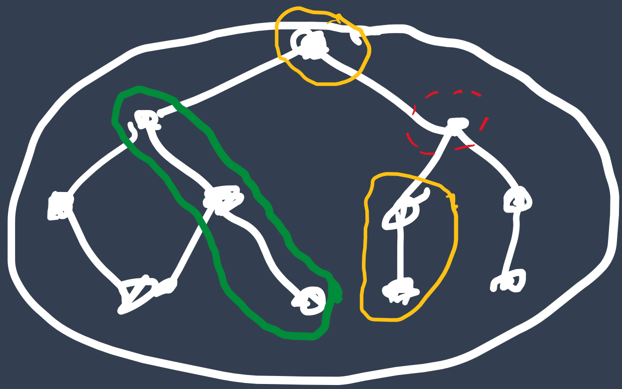
Wtedy $\varphi(t) \in A_t$. CZYLI: $\varphi \in \prod_{t\in T} A_t$ ■



($\Rightarrow$) na razie brak nam narzędzi // indukcja pozaskończona

Def. Niech $(X, \leq)$ będzie cz. porządkiem.

- zbiór $L \subseteq X$ jest <u>łańcuchem</u> w $(X, \leq)$ jeśli
  $$(\forall a, b \in L)\,(a \leq b \vee b \leq a)$$
- element $a \in X$ jest <u>ograniczeniem górnym</u> $B \subseteq X$ jeśli
  $$(\forall x \in B)\,(x \leq a).$$



$(X, \leq)$

UWAGA: $L \subseteq X$ jest łańc. $\wedge\ L_1 \subseteq L \Rightarrow L_1$ jest łańc.

LKZ (Lemat Kuratowskiego – Zorna)

W każdym niepustym częściowym porządku $(X, \leq)$ t.że

każdy łańcuch w $(X, \leq)$ ma ograniczenie górne

↑ własność K-Z

istnieje element maksymalny.

Tw. $\boxed{AC \equiv LKZ}$

$(\Rightarrow)$ później

D-d. $(\Leftarrow)$

$\mathcal{A}$ ← rodzina zbiorów niepustych parami rozłącznych

$A = \bigcup \mathcal{A}$

częściowe selektory

$X = \{S \subseteq A : (\forall X \in \mathcal{A})(|X \cap S| \leq 1)\}$

p. jeśli $a \in A$, to $\{a\} \in X$

Rozważmy cz. porz. $(X, \subseteq)$.

Sprawdzamy zał. LKZ.

$\mathcal{L} \subseteq X$ – liniowo uporz; czyli $S_1, S_2 \in \mathcal{L}$

$\rightarrow S_1 \subseteq S_2 \vee S_2 \subseteq S_1$.

Niech $L = \bigcup \mathcal{L}$.

oczywiście: $S \in \mathcal{L} \rightarrow S \subseteq L$

CEL: $L \in X$

weźmy $\in \mathcal{A}$.

Chcę pok. że $|Y \cap L| \leq 1$.

Załóżmy, że $|Y \cap L| > 1$.

weźmy $a, b \in Y \cap L$, $a \neq b$.

$a \in L = \bigcup \mathcal{L}$; jest $S_a \in \mathcal{L}$ t. że $a \in S_a$

$b \in L = \bigcup \mathcal{L}$; jest $S_b \in \mathcal{L}$ t. że $b \in S_b$.

ALE $S_a \subseteq S_b$ lub $S_b \subseteq S_a$.

$S_a \subseteq S_b \rightarrow \{a, b\} \subseteq S_b \rightarrow |S_b \cap Y| \geq 2$

LIPA

$S_b \subseteq S_a \rightarrow \{a, b\} \subseteq S_a \rightarrow |S_a \cap Y| \geq 2$

SPRZ.

WIĘC $L \in X$.

Z LKZ wynika, że w

$(X, \subseteq)$ istn. elem. maks.

Niech S będzie tym elementem.

CZYLI 1) $(\forall Y \in \mathcal{A})(|Y \cap S| \leq 1)$

2) S jest $\subseteq$-maks. elem. w $(X, \subseteq)$.

CLAIM: S jest selektorem $\mathcal{A}$,

zał. że mamy $Y \in \mathcal{A}$ t. że $Y \cap S = \emptyset$

Ale $Y \neq \emptyset$. Niech $a \in Y$

Niech $S_1 = S \cup \{a\}$

- $S_1 \in X$ (sprawdź. cz.)
- $S_1 \supsetneq S$. SPRZECZNOŚĆ

ZASTOSOWANIE LKZ.

<u>Tw</u>. W każdej przestrzeni liniowej istnieje baza.

D-d. Ustalamy prz. liniową V nad ciałem K.

$\mathcal{X} = \{L \subseteq V : L$ jest LINIOWO NIEZALEŻNY$\}$

$\mathcal{X}$ traktujemy jako cz. porz. z $\subseteq$. $((\mathcal{X}, \subseteq))$

Pok. że $(\mathcal{X}, \subseteq)$ spełnia zał. LKZ.

Weźmy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ który jest łańcuchem.

Niech $L = \bigcup \mathcal{L}$. Jasne, że $A \in \mathcal{L} \to A \subseteq L$.

CLAIM: $L \in \mathcal{X}$

$\left\{\begin{array}{l}\text{niech } x_1, \dots, x_n \in L, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \\ \text{oraz } \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0.\end{array}\right\}$ liniowość niezal. L.

CEL: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

$x_1 \in L = \bigcup \mathcal{L} \longrightarrow$ jest $L_1 \in \mathcal{L}$ t. że $x_1 \in L_1$

$\vdots$

$x_n \in L = \bigcup \mathcal{L} \longrightarrow$ jest $L_n \in \mathcal{L}$ t. że $x_n \in L_n$.

mamy $\{L_1, L_2, L_3, \dots, L_n\} \subseteq \mathcal{L}$. $\leftarrow$ Zawieszenie, lin. uporz.,

niech $L^* =$ najw. w sensie $\subseteq$ element $\{L_1, \dots, L_n\}$.

wtedy $x_1, x_2, \dots, x_n \in L^* \leftarrow$ lin. niezależny

WIĘC: $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ $\blacksquare$!!!

Uwagi: istnienie baz

- $V = \mathbb{R}^n$; $K = \mathbb{R}$.

  $\mathcal{B} = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)\}$

  baza

- $V = \mathbb{R}[x]$ ← przestrz. wszystkich wielomianów nad $\mathbb{R}$.

  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ ← baza.

- $V = \mathbb{R}$; V rozp. jako przestrzeń wektorowa na $\mathbb{Q}$

Bazy $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ ← bazy Hamela ! AC !