Liczby kardynalne - c.d.

$\boxed{\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}}$

(P) $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

(P) $0 < 1 < 2 < \ldots < \aleph_0 < \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} < 2^{(2^{\mathfrak{c}})} < \ldots$

$$\begin{cases} \beth_0 = \aleph_0 \\ \beth_{n+1} = 2^{\beth_n} \end{cases}$$

$\beth$ = Beth

$\beth_1 = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

$\beth_0 < \beth_1 < \beth_2 < \beth_3 < \ldots$

$\beth_2 = 2^{\beth_1} = 2^{\mathfrak{c}}$

$|X_n| = \beth_n \quad : \quad X_\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$

$\beth_0 < \beth_1 < \ldots < |X_\omega| = \beth_\omega < \beth_{\omega+1} < \ldots$

Uwaga. Załóżmy że l. kard. są zbiorem.

CARD

$\kappa \in CARD \longrightarrow X_\kappa$ t. że $|X_\kappa| = \kappa$.

$$Y = \bigcup_{\kappa \in CARD} X_\kappa \;; \quad |Y| \geq \kappa = |X_\kappa|$$

dla dow. $\kappa \in CARD$

wtedy $(\forall \kappa \in CARD)(|X_\kappa| < |P(Y)|)$

(bo $|Y| < |P(Y)|$).

sprz.

P. $\mathfrak{c} = 1\cdot\mathfrak{c} \leq 2\cdot\mathfrak{c} \leq 3\cdot\mathfrak{c} \leq \ldots \leq \aleph_0\cdot\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

Tu mamy równości.

$\mathfrak{c} = 2\cdot\mathfrak{c} = \ldots = n\cdot\mathfrak{c} = \ldots = \aleph_0\cdot\mathfrak{c}$,

TW. $\boxed{(A^B)^C \sim A^{B\times C}}$

w liczb. nat.:

$(n^m)^k = n^{m\cdot k}$

CZYLI: $\kappa = |A|$, $\lambda = |B|$, $\mu = |C|$:

$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$$

UWAGA:

$\mathbb{N}$: $n+n=n \iff n=0$

Card: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

$\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

$$\left(A^B\right)^C \sim A^{B\times C}$$

$$\Phi : \left(A^B\right)^C \longrightarrow A^{B\times C}$$

Dla $f \in \left(A^B\right)^C$:

$$\Phi(f)((b,c)) = (f(c))(b)$$

Jasne, że $\Phi : \left(A^B\right)^C \to A^{B\times C}$.

1. Zał. że $f,g \in \left(A^B\right)^C$ i $\Phi(f) = \Phi(g)$.

$$(\Phi(f) = \Phi(g)) \equiv (\forall (b,c) \in B\times C)\big(\Phi(f)((b,c)) = \Phi(g)((b,c))\big)$$

$$\equiv (\forall b)_B (\forall c)_C \big(f(c)(b) = g(c)(b)\big) \equiv (\forall c)_C \left[(\forall b)_B \big(f(c)(b) = g(c)(b)\big)\right]$$

$$\Rightarrow (\forall c)_C \big(f(c) = g(c)\big) \longrightarrow f = g \ \blacksquare \quad \Phi \text{ jest } 1-1.$$

$$\Phi(f)((b,c)) = (f(c))(b)$$

$\alpha \in A^{B\times C}$. Definiujemy:

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ A^B}}{f(c)})(b) = \alpha((b,c))$$

Wtedy $\Phi(f)((b,c)) = (f(c))(b) = \alpha((b,c))$

więc $\Phi(f) = \alpha$.

więc $\Phi : (A^B)^C \xrightarrow[\text{na}]{} A^{B\times C}$

$\blacksquare$

Informatyka: CURRY'ing

Java Script

```
function add(x, y) {
    return x+y;
}

function Adder(x) {
    return function(y) {
        return add(x, y)
    }
}
```

HASKEL

zamiana funkcji wielu zmiennych funkcjami 1 zmiennej

$add : N \times N \to N$

$add \in N^{N \times N}$

$\cong$

$(N^N)^N$

```
var add3 = Adder(3)
console.log(add3(10))
    // 13
var add111 = Adder(111)
```

P $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = c^{c} = (2^{\aleph_0})^{c} = 2^{\aleph_0 \cdot c} =$

$= 2^{c} > c.$

P $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} =$

$= 2^{\aleph_0} = c.$

Tw. $|C(\mathbb{R},\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$ $\qquad |R^R| = 2^{\mathfrak{c}}$

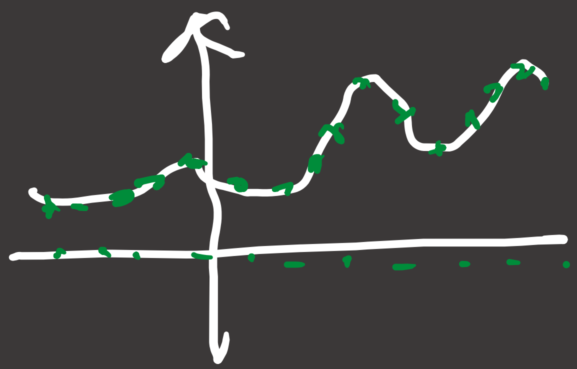
<u>D-d</u>. 1) $C(R,R) \supseteq \{const_a : a \in R\}$

$|C(R,R)| \geq \mathfrak{c}$

2) Zdefiniujemy

$\Phi : C(R,R) \xrightarrow{1-1} R^{Q}$ $\qquad |R^{Q}| = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

$\Phi(f) = f \restriction Q$.



Pokażę, że Φ jest 1-1.

Niech $f, g : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{ciąg}} \mathbb{R}$ i $\Phi(f) = \Phi(g)$,

czyli
$$f \restriction \mathbb{Q} = g \restriction \mathbb{Q}.$$

Weźmy $x \in \mathbb{R}$. Weźmy jakiś ciąg $(a)_{n \in \mathbb{N}}$ t. że $a_n \in \mathbb{Q}$ i $\lim_n a_n = x$.

$$\left[\text{np. } a_n = \frac{\lfloor n \cdot x \rfloor}{n} \right]$$

$$n \cdot x - 1 < \lfloor n \cdot x \rfloor \leq n \cdot x$$

$$x - \frac{1}{n} < a_n \leq x$$

$$\downarrow \quad \downarrow\downarrow \quad \downarrow$$

$$x \qquad x \qquad x$$

Wtedy

$$f(x) = f(\lim_n a_n) \overset{\text{ciąg}}{=} \lim_n f(a_n)$$

$$= \lim_n (f\restriction Q)(a_n) = \lim_n (g \restriction Q)(a_n) =$$

$$= \lim_n g(a_n) \overset{\text{ciąg}}{=} g(\lim_n a_n) = g(x).$$

WIĘC $f = g$ $\blacksquare$

Def (otoczka Kleene'ego)

$$X^* = \bigcup_{n \geq 0} X^n, \qquad X^0 = \{\varepsilon\}$$

$\varepsilon \leftarrow$ ciąg pusty

$\uparrow$

zbiór wsz. ~~...~~ skończ.

o wyrazach ~~...~~ ze zbioru X,

Tw. $\begin{cases} |X| \leq \aleph_0 \\ X \neq \emptyset \end{cases} \longrightarrow |X^*| = \aleph_0$

D-d. $|X^n| \leq \underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \ldots \cdot \aleph_0}_{n} = \aleph_0$

suma przel. rodz. zb. przelicz. jest przeliczalna. $\blacksquare$

(P) X = ASCII

X^* = skończone napisy. ← przeliczalny.

ustalmy język progr.

$\mathcal{P} = \{ p \in X^* : p$ jest progr. na funkcję z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N} \}$

np. 'int scc(int x) {return (x+1);}

int pow2(int x) {return (2^x);}

tło → $\mathcal{P} \subseteq X^*$ – przeliczalny

$\mathcal{F} = \{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} :$ istnieje $p \in \mathcal{P}$ t. że p oblicza $f \}$

$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$

$\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$; $p \longrightarrow$ funkcja wyznaczona przez p.

$\pi : \mathcal{P} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\text{na}", "\varphi"'] \arrow[rr, bend left, "\pi \circ \varphi"] & \mathcal{P} \arrow[r, "\pi", "\text{na}"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

(przelicz. $\mathcal{P}$)

$\mathcal{F}$ - przelicz. ; $|\mathcal{F}| = \aleph_0$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \subseteq & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \aleph_0 & & \mathfrak{c} \end{array}}$$

! ! ! ! !

metoda przekątniowa

$$\mathcal{F} = \{ f_n : n \in \mathbb{N} \}. \leftarrow \text{obl. z } \mathbb{N} \text{ w } \mathbb{N}$$

$$h(n) = f_n(n) + 1.$$

- oczywiście $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
- $h \notin \mathcal{F}$

D-d. gdyby: $h \in \mathcal{F}$, to $h = f_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, a wtedy

$$h(n) = f_n(n)$$

$$\parallel$$

$$f_n(n) + 1$$

$\boxed{\text{sprz.}}$

	0	1	2	3	...
f_0	3 (4)	4	1	2	...
f_1	1	7 (6)	9	3	...
f_2	2	0	6 (7)	1	
⋮					