A7 (Aksjomat nieskończoności)

$$(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall t)(t \in x \rightarrow \underbrace{t \cup \{t\}}_{\text{następnik } t} \in x))$$

Uwagi: ① weźmy taki x.

- $\emptyset \in x$
- $x \ni \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
- $x \ni \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $x \ni \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

② Oznaczenie: $\hat{0} = \emptyset$; $\widehat{n+1} = \hat{n} \cup \{\hat{n}\}$

$\hat{1} = \{\emptyset\} = \{\hat{0}\}$

$\hat{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\hat{0}, \hat{1}\}$

$\hat{3} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$

$\widehat{n+1} = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots \hat{n}\}$

3. Ustalmy jeden zbiór x t.ż. w A7

Def.

$$\omega = \bigcap \overbrace{\left\{a \in P(x) : \underbrace{\emptyset \in a \wedge (\forall t \in a)(t \cup \{t\} \in a)}_{\text{zbiór induktywny}}\right\}}^{S}$$

$\bigcap$: jak zdefiniować?
$\bigcap y$, dla $y \neq \emptyset$.

F. ω jest najmniejszym zbiorem induktywnym

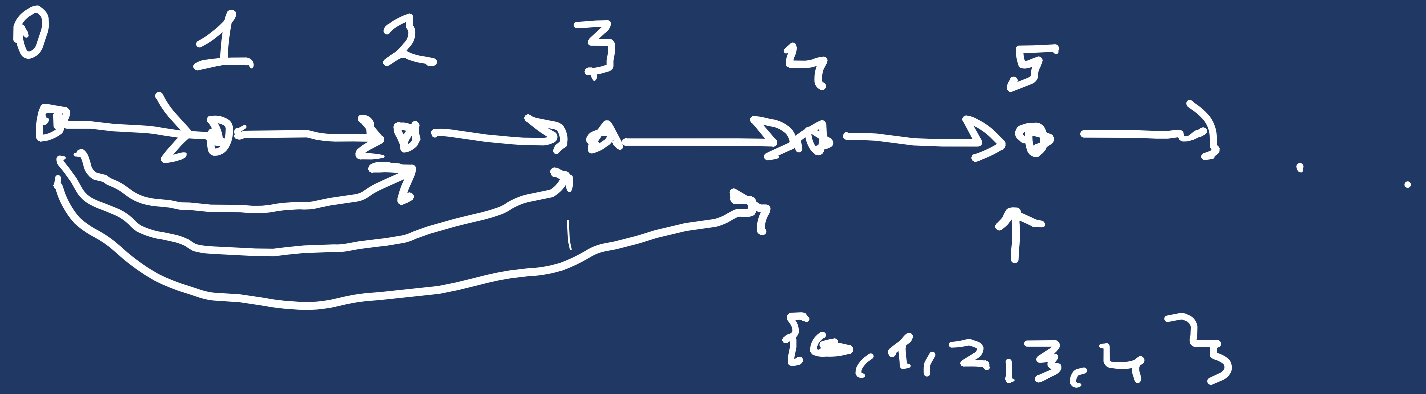
Czemu ω jest indukt.

- $\emptyset \in \omega$ (bo $(\forall a \in S)(\emptyset \in a)$)
- $t \in \omega$; weźmy $a \in S$. Wtedy $t \in a$, więc $t \cup \{t\} \in a$, więc $t \cup \{t\} \in \omega$

- Interpretacja:

ω = zbiór liczb naturalnych

$n \in \omega$; $n+1 = n \cup \{n\}$ ← następnik elementu n.



Mamy: $n < m \equiv n \in m$.

Uwaga: mamy ω.

Możemy teraz skonstruować

to możemy już zrobić

- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n$
- $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$-\mathbb{N}$ $\mathbb{N} = \omega$

A8 (aksjomat zastępowania) Dla dowolnej formuły $\varphi(u, v, \overbrace{z_1 \ldots z_n}^{\vec{z}})$ języka ZF:

$$(\forall u)(\forall z_1 \ldots z_n)(\exists! v)\,\varphi(u,v,\vec{z}) \longrightarrow$$

$$(\forall x)(\forall \vec{z})(\exists y)(\forall t)[t \in y \leftrightarrow (\exists s \in x)\,\varphi(s,t,\vec{z})).$$

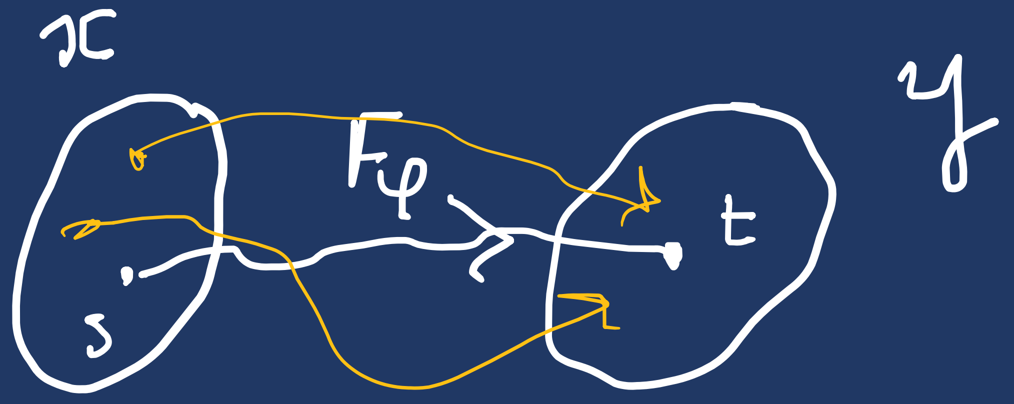
O CO TU CHODZI?:

$$u \xrightarrow{F_\varphi} v$$

$\forall u \exists! v \; \varphi(u,v)$:

czyli $(\forall u)\varphi(u, F_\varphi(u))$.

Oznaczenie: $(\exists! x)\varphi(x) \equiv (\exists x)(\varphi(x) \wedge (\forall y)(\varphi(y) \to y = x))$



$$(\forall x)(\exists y)(\forall t)(t \in y \longleftrightarrow (\exists s \in x)\varphi(s,t))$$

ZZC

$$(\forall x)(\exists y)(\forall t)(t \in y \longleftrightarrow (\exists s \in x)(t = F_\varphi(s)))$$

$\uparrow$

$F_\varphi[x]$

ZII

$$(\forall x)(\exists F_\varphi[x])$$

czyli: obraz zbioru przez definiowalną funkcję jest zbiorem.

Pytanie: czy istnieje x t. że $x \in x$?

czy istnieją x, y t. że $x \in y \in x$?

A9 (Aksjomat regularności)

$$(\forall x)(x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y \in x)(x \cap y = \emptyset))$$

OZNACZENIE:

$$ZF = A1 + A2 + \ldots + A9$$

teoria mnog. Zermelo-Fraenkel'a.

$A9$: $(\forall x)(x \neq \phi \longrightarrow (\exists y \in x)(y \cap x = \phi))$

Tw. $ZF \vdash (\forall x)(x \notin x)$.

<u>D-d</u>. Zał. że jest x t. że $x \in x$.

Niech $a = \{x\}$. Wtedy $a \neq \phi$.

Jest więc $t \in a$ t. że $t \cap a = \phi$.

Ale $t = x$. Czyli $x \cap \{x\} = \phi$.

ALE : $x \in x$, $x \in \{x\}$ $\to$ $x \cap \{x\} \neq \phi$

spr.

wn. $ZF \vdash \neg (\exists x, y)(x \in y \wedge y \in x)$.

D-d. Załóżmy, że mamy x, y t. że

$$x \in y \wedge y \in x$$

Niech $a = \{x, y\}$. Wtedy $a \neq \emptyset$.

~~Niech~~ Istnieje $t \in a$ t. że $t \cap a = \emptyset$.

- $t = x$: $\quad \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ y}}{x} \cap \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ y}}{\{x, y\}} = \emptyset$ $\quad$ sprz.

- $t = y$: $\quad \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ x}}{y} \cap \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ x}}{\{x, y\}} = \emptyset$ $\quad$ sprz. $\square$

$f(0) \quad f(1) \quad \ldots$

$x \ni y \ni x \ni y \ni x \ni y \ni \ldots$

Wn. $ZF \vdash \neg(\exists f : \omega \to \ldots)(\forall n)(f(n+1) \in f(n))$

Uwaga: $x_n = f(n)$:

$(\forall n)(f(n+1) \in f(n)\} \equiv x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \ldots$

D-d. Zał. że $(\forall n)(f(n+1) \in f(n))$.

Niech $a = \{f(n) : n \in \omega\}$, wtedy $a \neq \emptyset$.

Jest $n \in \omega$ t. że $f(n) \cap a = \emptyset$.

Ale wtedy
- $f(n+1) \in f(n)$
- $f(n+1) \in a$

więc $f(n) \cap a \neq \emptyset$. sprzeczność $\boxtimes$

AC (Aksjomat wyboru)

$$(\forall x)\left[\left((\forall y_1, y_2 \in x)(y_1 \neq y_2 \to y_1 \cap y_2 = \emptyset) \land (\forall y \in x)(y \neq \emptyset)\right) \to (\exists s)(\forall y \in x)(\underbrace{|s \cap y| = 1}_{\text{III}})\right]$$

$$(\exists t)(s \cap y = \{t\})$$

Tw. (Gödel, ± 1938).

$$\mathrm{Cons}(ZF) \longrightarrow \mathrm{Cons}(ZF + AC)$$

Tw (Cohen, ± 1974)

$$\mathrm{Cons}(ZF) \longrightarrow \mathrm{Cons}(ZF + \neg AC)$$

Główny problem matematyki

CZY $\mathrm{Cons}(ZF)$?

Czy istnieje $\varphi \in L_{ZF}$:

$ZF \vdash \varphi$

$ZF \vdash \neg\varphi$?

$\models (p \land \neg p) \to q$

PRZYKŁAD. Język: $\cdot$, e

$\cdot$ — działanie binarne, e — stała

A1: $(\forall x,y,z)(x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z)$

A2: $(\forall x)(x\cdot e=x \wedge e\cdot x=x)$

A3: $(\forall x)(\exists y)(x\cdot y=e \wedge y\cdot x=e)$

$TG=\{A1, A2, A3\}$

Tw. $TG \vdash (\forall y)\left[(\forall x)(x\cdot y=y\cdot x=x)\rightarrow y=e\right]$

Tw. $TG \vdash (\forall x)(\forall y_1,y_2)\left(\left(x\cdot y_1=y_1\cdot x=e \wedge x\cdot y_2=y_2\cdot x=e\right)\rightarrow y_1=y_2\right)$

$AB = (\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$

Q: $TG \vdash AB$???

$S_3 \leftarrow$ grupa permutacji $\{1,2,3\}$

$\circ \rightarrow$ złożenie

$S_3 \models TG$ $\qquad e = Id_{\{1,2,3\}}$

Ale $S_3 \models \neg AB$ $\leftarrow$ ZADANIE

Gdyby $TG \vdash AB$ to równ $S_3 \models AB$ sprz.

Rozw: $TG \cup \{\neg AB\}$ – niesprz

Q: $TG \vdash \neg AB$??

Oczywiście, że nie!

$$G = (\{0\}, \cdot) \qquad \begin{cases} 0 \cdot 0 = 0 \\ e = 0 \end{cases}$$

$G \models TG$

$G \models AB$

- $Cons(TG \cup \{AB\})$
- $Cons(TG \cup \{\neg AB\})$

AB jest niezależne od TG

OZNACZENIE:

$$ZFC = ZF \cup \{AC\}$$

CEL: $\neg \left(ZF \setminus \{\text{Aks. niesk}\} \vdash \text{Aks. nieskończoności} \right)$