**Def.** $\mathrm{tran}(x) \equiv (\forall t \in x)(t \subseteq x)$ zbiór tranzytywny

FAKT:
1) $\mathrm{tran}(\emptyset)$
2) $(\forall x)(\mathrm{tran}(x) \to \mathrm{tran}(x \cup \{x\}))$
3) $(\forall x)(\mathrm{tran}(x) \to \mathrm{tran}(P(x)))$

D-d. 1) trywialne

2) Zał. że $\mathrm{tran}(x)$. Weźmy $y \in x \cup \{x\}$
- $y \in x$ : $y \subseteq x \subseteq x \cup \{x\}$
- $y = x$ : $y \subseteq x \subseteq x \cup \{x\}$ $\square$

3) Zał. że $\mathrm{tran}(x)$. Niech $y \in P(x)$. // cel: $y \subseteq P(x)$

weźmy $t \in y$. Wiemy, że $y \subseteq x$. Zatem $t \in x$.

czyli $t \in y \to t \in x$

czyli ~~$y \subseteq x$~~ $t \in y \to t \subseteq x \to t \in P(x)$

$\xrightarrow{\mathrm{tran}(x)}$ CZYLI $y \subseteq P(x)$.

P. $\{0,1,2,3,4\} \leftarrow$ tran $\qquad \emptyset \to 0 \cup \{0\} = 1$

$a = \{0, 1, 3, 4\} \leftarrow$ nie jest traz., bo

1) $3 \in a$

2) $\neg\ 3 \subseteq a$

(bo $2 \in 3 = \{0,1,2\}$)

<u>Def</u>. $\begin{cases} R_0 = \emptyset \\ R_{n+1} = P(R_n) \end{cases}$ dla $n \in \omega$

$A \in P(A)$

wn. $(\forall n)$ $\operatorname{tran}(R_n)$.

wn. $R_0 \in R_1 \in R_2 \in R_3 \in \ldots$

wn. $R_0 \subsetneq R_1 \subsetneq R_2 \subsetneq R_3 \subsetneq \ldots$

**Lemat**. Zał. że $(\forall y \in x)\ tran(y)$. Wtedy $tran(\bigcup x)$.

**D-d**. Bierzemy $y \in \bigcup x$. Jest $a \in x$ t. że $y \in a$.

Ale $a$ jest tranzyt. Więc $y \subseteq a \subseteq \bigcup x$ $\boxed{}$

**Def**. $R_\omega = \bigcup_{n \in \omega} R_n$. ← przeliczalny $\aleph_0$.

Wniosek: $tran(R_\omega)$.

$$R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots\dots \subseteq \underline{R_\omega}$$

Tw. ZF $\vdash$ "$(R_\omega, \in) \models ZFC \setminus \{Ax\ wiesk\}$"

D-d. (Hint)

- Ak. ekstensj.

$$(\forall x \in R_\omega)(\forall y \in R_\omega)\left[(\forall t \in R_\omega)(t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y\right]$$

Weźmy $x, y \in R_\omega$.

Zał. że $(\forall t \in R_\omega)(t \in x \leftrightarrow t \in y)$.

Z tego, że $x, y \in R_\omega$ wynika, że $x, y \subseteq R_\omega$

CEL: $(\forall t)(t \in x \leftrightarrow t \in y)$

Weźmy dowolne $t$.

1) $t \in R_\omega$ : ok, $t \in x \leftrightarrow t \in y$

2) $t \notin R_\omega$ : $t \notin x \wedge t \notin y$ ; więc $t \in x \leftrightarrow t \in y$ $\blacksquare$

• AKS, pary: $\quad x, y \in R_\omega = \bigcup_n R_n$

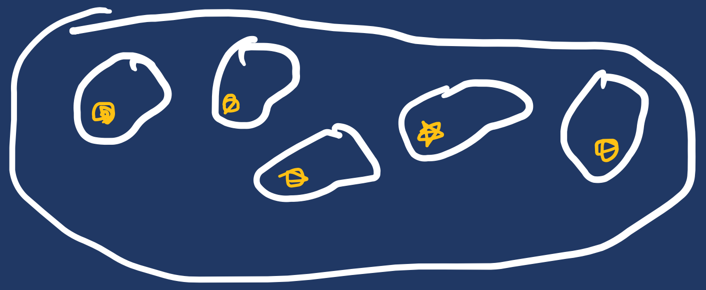
$\left.\begin{array}{l} x \in R_n \\ y \in R_m \end{array}\right\}$ $k = \max\{n, m\}$

$\rightarrow x, y \in R_K \rightarrow \{x,y\} \subseteq R_K$

$\rightarrow \{x,y\} \in R_{K+1} \subseteq R_\omega$

$\rightarrow \{x,y\} \in R_\omega$.

UCQGQ ⊃ AC:



$\in R_n$

$\subseteq$

$\subseteq R_n \qquad S \in R_{n+1}$.

# Liczby porządkowe

Def. $\mathrm{ord}(x) = \mathrm{tran}(x) \wedge (\forall u,v \in x)(u \in v \vee u = v \vee v \in u)$

Uwaga: ustalmy $x$.

Dla $u,v \in x$ def: $u \leq v \equiv (u \in v) \vee (u = v)$

$(\forall u,v \in x)(u \in v \vee u = v \vee v \in u) \equiv \leq$ - liniowo porządkuje $x$.

Lemat: 1) $\mathrm{ord}(\emptyset)$

2) $(\forall x)(\mathrm{ord}(x) \longrightarrow \mathrm{ord}(x \cup \{x\}))$

Wn. $(\forall n \in \omega)(\mathrm{ord}(n))$

**D-d.** Zał. że $ord(x)$.

$$ord(x) \Downarrow ord(x \cup \{x\})$$

- $tran(x \cup \{x\})$ ← to już wiemy.
- $u, v \in x \cup \{x\}$.

1) $u, v \in x \longrightarrow$ ok $(u \in v \lor u = v \lor v \in u)$
2) $u \in x \land v \in \{x\} \longrightarrow u \in x \land v = x \longrightarrow$ ok
3) $u \in \{x\} \land v \in x$
4) $u, v \in \{x\} \longrightarrow u = v \; (= x)$

$\blacksquare$

Lemat $\left((\forall x)\left(\mathrm{ord}(x) \to (\forall y \in x)(\mathrm{ord}(y))\right)\right)$.

P. $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

D-d. Ustalmy $x$ t. że $\mathrm{ord}(x)$.

Weźmy $y \in x$.

- $x$ jest traz. więc $y \subseteq x$.
  więc $a, b \in y$ to $a, b \in x$, więc $a \in b \vee a = b \vee b \in a$.
- musimy pok., że $\mathrm{tran}(y)$.

Porównujemy $t$ i $y$.
(1) $t \in y$ OK
(2) $t = y$
(3) $y \in t$

Weźmy $a \in y$. Pok. że $a \subseteq y$.
Weźmy $t \in a$. Musimy pok. że $t \in y$.

- $t \in a \in y \subseteq x \to t \in a \subseteq x \to t \in x$.

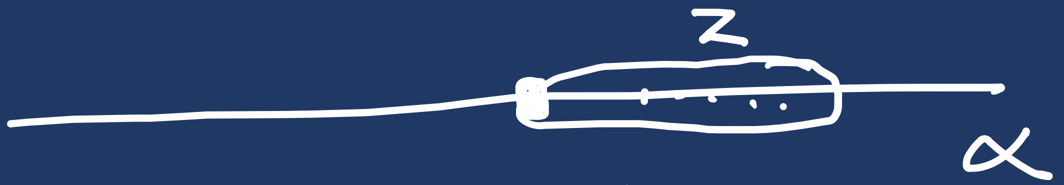
(2) $t = y$
$t \in a \in y = t$
$t \in a \in t$
niemożliwe
(3) $y \in t$
$t \in a \in y \in t$
AKS. REG.

**Tw.** Ustalmy $\alpha$ t. że $\mathrm{ord}(\alpha)$. Definiujemy na $\alpha$

$$x \leq y \equiv x \in y \vee x = y$$

wtedy $\leq$ jest <u>DOBRYM PORZ.</u> na $\alpha$.

**D-d.**




mamy $Z \subseteq \alpha$.
$Z \neq \emptyset$.

weźmy $\gamma \in Z$ t. że

$$\gamma \cap Z = \emptyset. \quad \text{(Aks. reg).}$$

CEL: $(\forall \beta \in Z)(\gamma \leq \beta)$.

weźmy $\beta \in Z$. wtedy $\beta, \gamma \in \alpha$.

C1. $\beta \in \gamma$ : $\beta \in \gamma \cap Z$ ← niemożliwe

C2. $\beta = \gamma$ : ok : $\gamma \leq \beta$

C3 $\gamma \in \beta$ : ok : $\gamma \leq \beta$ → ok

$\blacksquare$

**FAKT.** Ustalmy $\mathrm{ord}(\alpha)$. Niech $\beta, \gamma \in \alpha$.

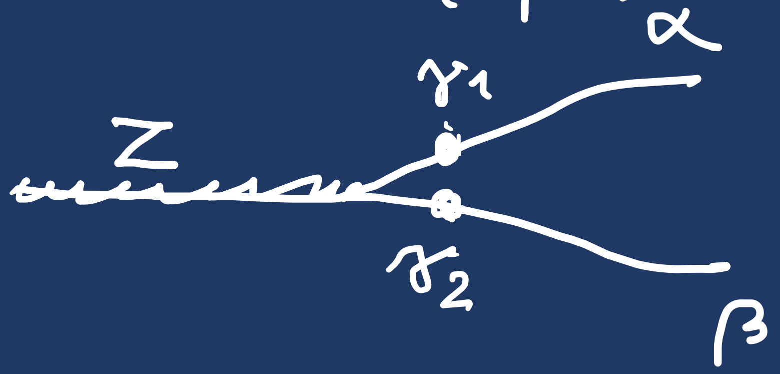
Wtedy $\beta \leq \gamma \equiv \beta \subseteq \gamma$.

D-d (zadanie)

**Tw.** $(\forall \alpha, \beta)\big((\mathrm{ord}(\alpha) \land \mathrm{ord}(\beta)) \longrightarrow \alpha \in \beta \lor \alpha = \beta \lor \beta \in \alpha\big)$.

**D-d.** Bierzemy $\alpha, \beta \leftarrow$ L. powz.

Zał. że $\alpha \neq \beta$.




$$\left.\begin{array}{l} Z = \alpha \cap \beta \\ \alpha \setminus Z \neq \emptyset \\ \beta \setminus Z \neq \emptyset \\ \gamma_1 = \min(\alpha \setminus Z) \\ \gamma_2 = \min(\beta \setminus Z) \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$$

spr.

FAKT. Załóżmy, że $(\forall t \in x)(\mathrm{ord}(t))$

wtedy $\mathrm{ord}(\bigcup x)$.

D-d: $u, v \in \bigcup x$.

$$\left.\begin{array}{l} u \in \alpha \in x \\ v \in \beta \in x \end{array}\right\} \quad \underbrace{\alpha \subseteq \beta}_{(C1)} \text{ lub } \beta \subseteq \alpha$$

C1: $u, v \in \beta \longrightarrow$ $u, v$ są porównywalne.

C2: $u, v \in \alpha \longrightarrow$

$\boxtimes$

(P) $(\forall n\in\omega)\ \mathrm{ord}(n)$.

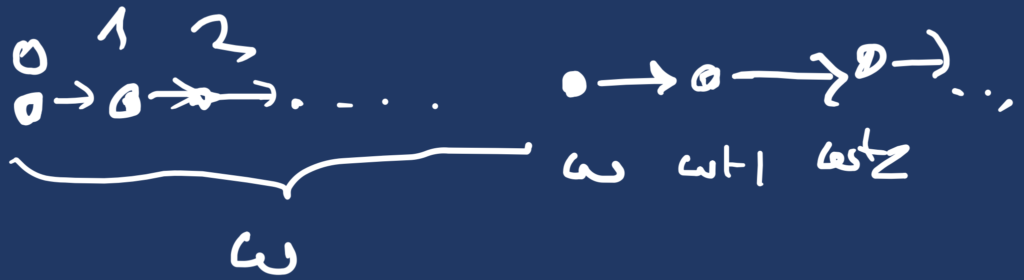
$\mathrm{ord}(\bigcup\omega)$ ; ale $0\in 1\in 2\in 3\in \dots$

$0\subseteq 1\subseteq 2\subseteq 3\subseteq \dots$

$$\bigcup\omega=\omega$$

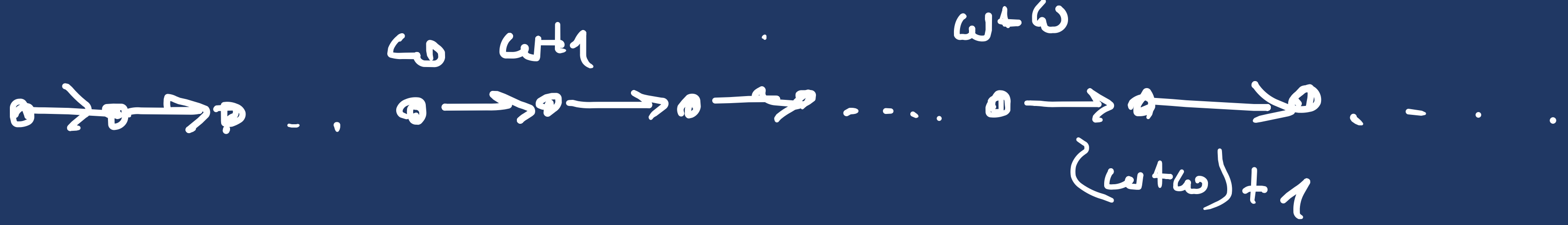
Wn. $\mathrm{ord}(\omega)$

Wn. $\mathrm{ord}(\underbrace{\omega\cup\{\omega\}}_{\omega+1})$




$$S(x)=x\cup\{x\}$$

$$S(\omega+1)=\omega+2$$



FAKT. nie istnieje zbiór wszyst. l. porz.

D-d. zał. że ON jest zb. wsz. l. porz.

$$x \in ON \longrightarrow ord(x)$$

wtedy $* = \bigcup ON$.

wtedy $ord(*)$. $\quad * \in ON$

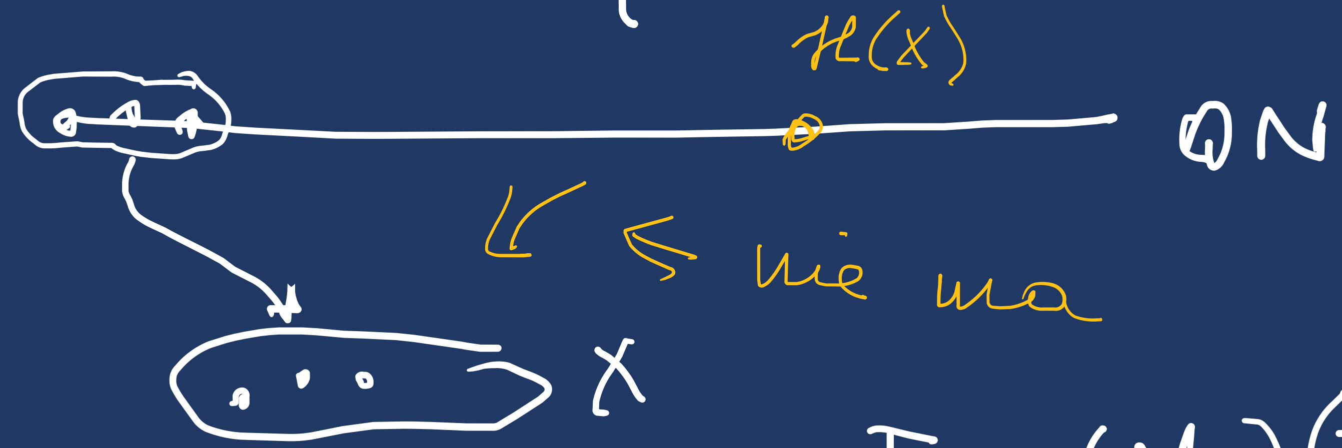
$$* \cup \{*\} \in ON$$

$$\underset{\substack{\text{Ш} \\ *}}{* \cup \{*\}} \leq *$$

sprz.

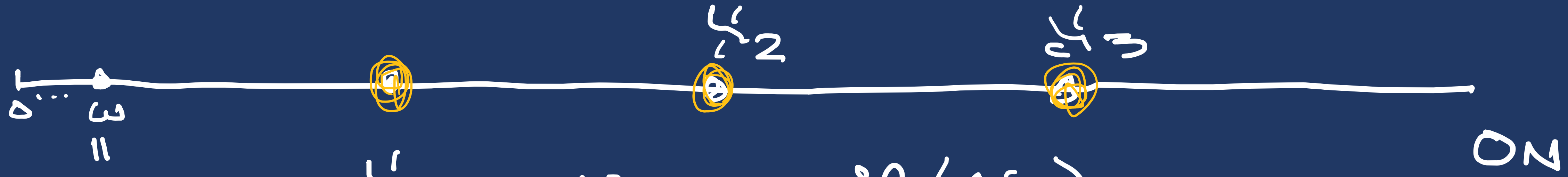
Def (Funkcja Hartogsa)

$$\mathcal{H}(x) = \min\{\alpha : \mathrm{ord}(\alpha) \wedge \neg(\exists f : \alpha \xrightarrow{1-1} x)\}$$




Tw $(\forall x)(\exists \mathcal{H}(x))$

Aksj. zb. pot. + Aksj. zastępowania




$\omega = \aleph_0$

$$\aleph_{n+1} = \mathcal{H}(\aleph_n)$$


$$\omega_1 = \min\{\alpha \in ON : \neg\exists f : \alpha \xrightarrow{1-1} \omega\}$$

jest nieprzel.

Alefy

$$\left.\begin{array}{l} \alpha < \omega_1 \\ f : \alpha \xrightarrow{1-1} \omega \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\text{-przelicz.}$$

przeliczalne

HIPOTEZA CONTINUUM: $\mathfrak{c} = \aleph_1$

$$CH = "2^{\aleph_0} = \aleph_1"$$

Tw (Gödel) $\quad Cons(ZF) \to Cons(ZFC + CH)$

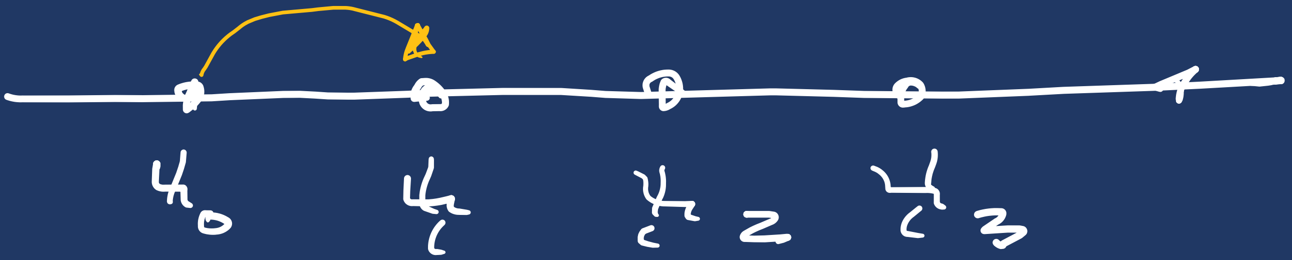
Tw (Cohen) $\quad Cons(ZF) \to Cons(ZFC + \neg CH)$

Wn. CH jest niezależna od ZFC.

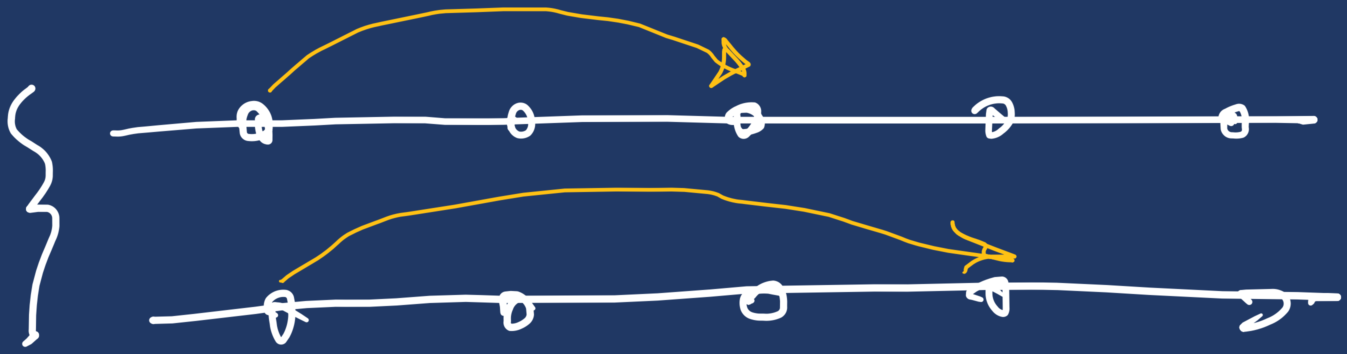
Czemu może być równe $2^{\aleph_0}$

$f(x) = 2^x$

CH

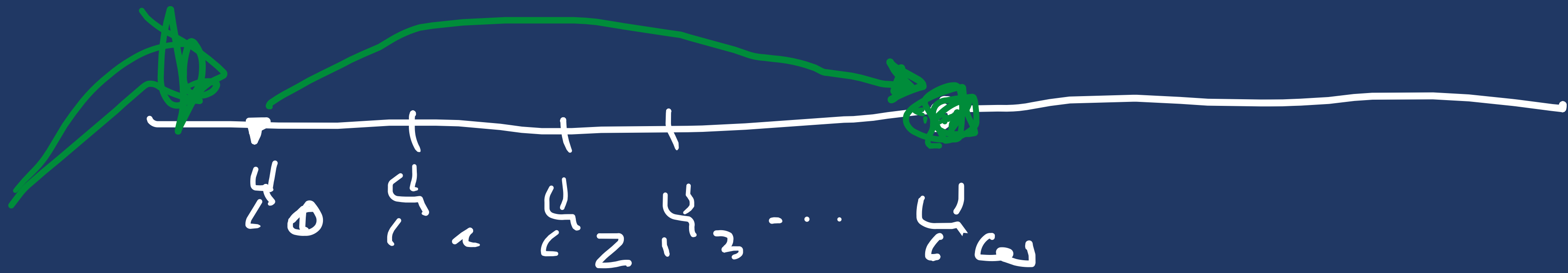


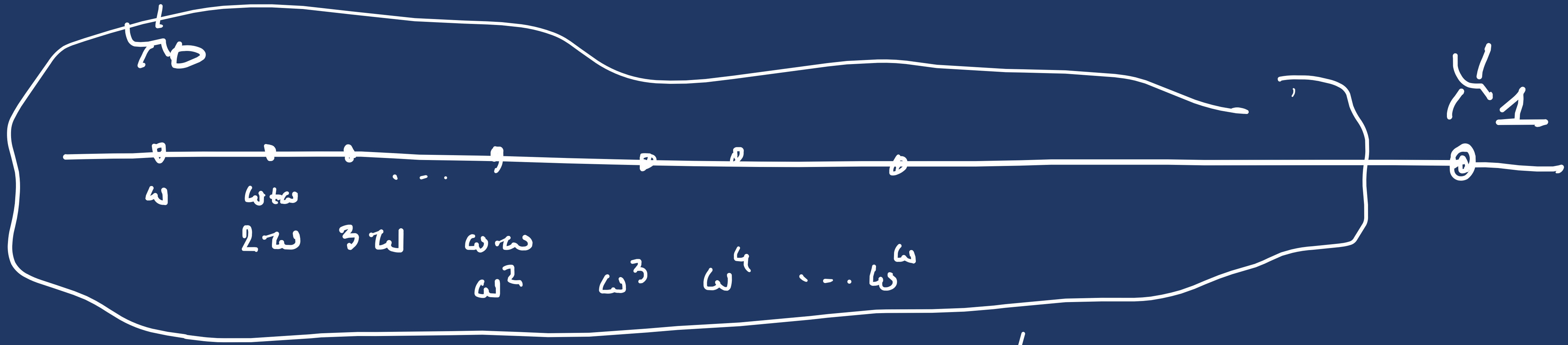

może



$2^{\aleph_1} = 2$

niemożliwe





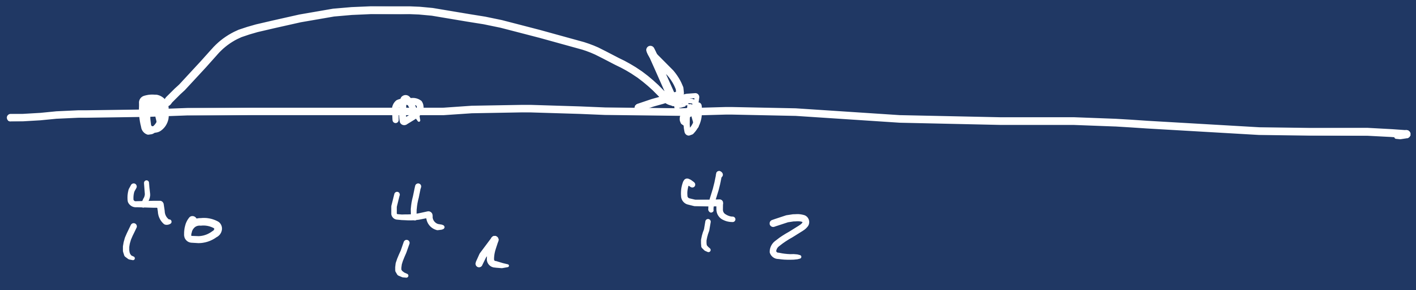

$\omega^\omega = \bigcup_n \omega^n \leftarrow$ przelicz.

Tw. $(\forall x)\big(\mathrm{card}(x) \to (\exists \alpha)(x = \aleph_\alpha)\big)$

$\Uparrow$

AC

$\boxed{\aleph_0}$ = "klasa abstr. wsz. zbiorów równ. z $\mathbb{N}$"




$2^{\aleph_0} = \aleph_2$

nie zbuduję z $P$

$|P(n)| \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

$\aleph_1 = \mathcal{H}(\aleph_0)$

AC $\longrightarrow$ LKZ

ind. pozask.