Teoria kategorii

Kategoria $\mathcal{M}$:
- $ob(\mathcal{M}) \leftarrow$ obiekty
- $mor(\mathcal{M}) \leftarrow$ morfizmy/strzałki

- jeśli f jest morfizmem to mamy określone

$$dom(f) \in ob(\mathcal{M})$$
$$cdom(f) \in ob(\mathcal{M})$$

$$\left\{ X \xrightarrow{f} Y \right\} \equiv f: X \to Y$$

- własności

$$\left.\begin{array}{l} f: X \longrightarrow Y \\ g: Y \longrightarrow Z \end{array}\right\} \longrightarrow \text{określone } \circ \text{ t. że}$$

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

- ma być łączne

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

• dla każdego $X \in ob(\mathcal{K})$ istnieje $1_X : X \longrightarrow X$

t. że

1) jeśli $f : X \longrightarrow Y$

$$f \circ 1_X = f$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[rr, bend right, "f \circ 1_X"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

2) $h : Y \longrightarrow X$

$$1_X \circ h = h$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right] & X \arrow[r, "1_X"] & X \end{tikzcd}$$

P Set : obiekty : zbiory

morfizmy : $f : X \longrightarrow Y$ funkcje

$dom(f) = X$

$rng(f) \subseteq Y$

Subtelność

$f = \{(n,n) : n \in \mathbb{N}\}$

- $f(n) = n \; ; \; n \in \mathbb{N}$

  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$f \neq \tilde{f}$

- $\tilde{f}(n) = n \; : n \in N \quad : \quad f(n) \in \mathbb{Z}$

  $\tilde{f} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

```
unsigned f(unsigned n){return n;}
int f(unsigned n) {return (int)n; }
```

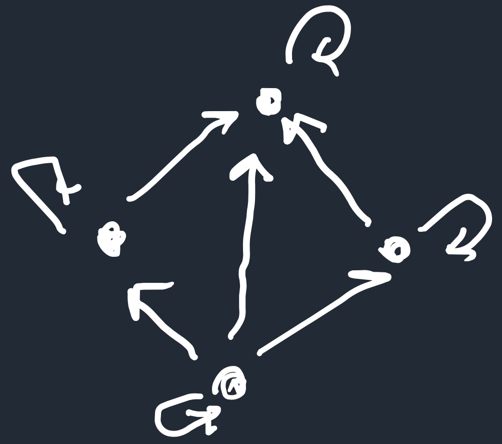
(P2) $\boxed{\mathbf{Grp}}$: obiekty : grupy

morfizmy : $h: G_1 \to G_2 \equiv$ h jest homomorfizmem.

(P3) $\mathcal{X} = (X, \leq)$ – cz. porz.

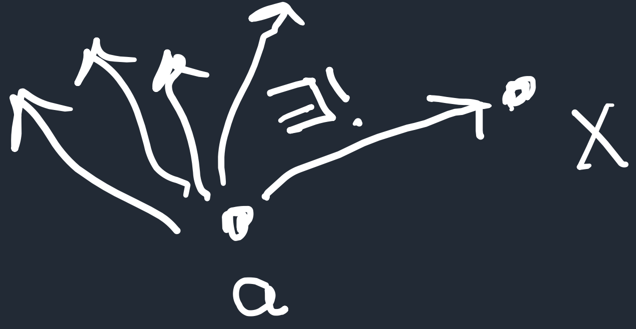
$\mathcal{K}(\mathcal{X})$: • obiekty : elementy X

• $f: x \to y \equiv x \leq y$



$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\leq"] \arrow[rr, bend right, "\leq"'] & y \arrow[r, "\leq"] & z \end{tikzcd}$$

Def. mówimy ust. kategorii $\mathcal{K}$ obiekt a jest początkowy jeśli $(\forall X \in ob(\mathcal{K}))(\exists! f: a \to X)$



SET : obiekt początkowy : $\emptyset$

$$\emptyset : \emptyset \longrightarrow X$$

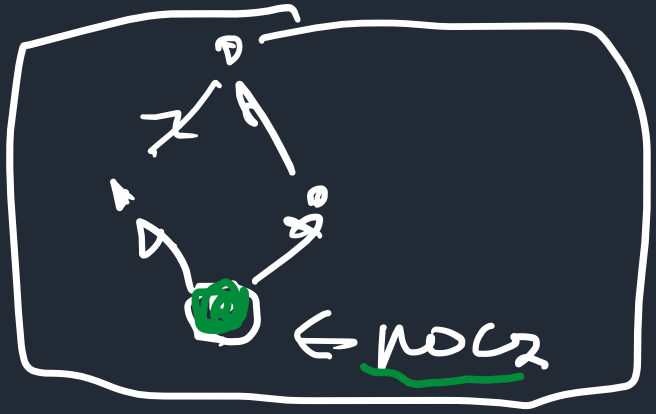
Grp : $N = (\{0\}, +)$ $\qquad$ $\mathcal{G} = (G, \circ)$

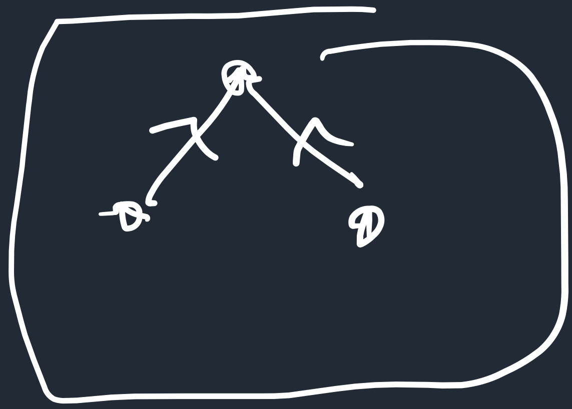
$\uparrow$ $\qquad \varphi : N \longrightarrow \mathcal{G}$: $\varphi(0) = e_G$.

ob. pocz.

P $\mathcal{K}((X, \leq))$: $(\forall x)(a \leq x)$

a jest pocz. $\equiv$ a jest najmniejszy





nie ma obiekt. pocz.

Def. $(X \underset{izo}{\approx} Y) \equiv (\exists f: X \to Y)(\exists g: Y \to X)$
$(g \circ f = id_X \wedge f \circ g = id_Y)$

- SET : $X \underset{izo}{\approx} Y \equiv |X| = |Y|$
- Grp : $(\{0\}, +)$, $(\{1\}, \cdot)$ ← początkowe

Tw. $\boxed{a, b - \text{początkowe} \longrightarrow a \underset{izo}{\cong} b}$

Uwaga: $\left\{\begin{array}{l} a - \text{pocz.} \\ f: a \to a \end{array}\right\} \longrightarrow f = id_a$.

D-d. a, b – pocz.

$(\forall x)(\exists! f)(f: a \to x)$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] & b \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

$g \circ f : a \to a$

$\left\{\begin{array}{l} g \circ f = id_a \\ f \circ g = id_b \end{array}\right.$

$a \underset{\text{izo}}{\cong} b$.

Def. b jest końcowy $\equiv (\forall X \in Ob(\mathcal{K}))(\exists! f : X \to b)$

SET. $\{\bullet\}$ – końcowy

X – dowolny

$$\underbrace{X \times \{\bullet\}}_{const_{X,\bullet}} : X \to \{\bullet\}$$

Grp: $N = (\{0\}, +)$ – końcowy

$(G, \cdot)$ $\quad \varphi(x) = 0 \quad \varphi : \mathcal{G} \to N$

$\mathcal{K}((X, \leq))$: koniec $\equiv$ najw.

Kategoria odwrotna: $\mathcal{K} \leftarrow$ kategoria

$\mathcal{K}^{op}$:
- $ob(\mathcal{K}^{op}) = ob(\mathcal{K})$
- $\underbrace{f: X \longrightarrow Y}_{\mathcal{K}^{op}} \equiv f: Y \longrightarrow X$
- w $\mathcal{K}^{op}$ $\quad f * g = g \circ f$.

<u>Zadanie</u>: to jest kategoria.

$$(\mathcal{K}^{op})^{op} = \mathcal{K}$$

$\mathcal{K} \models (\forall X)(\exists! f)(f : X \to b)$ (b jest końc. w $\mathcal{K}$)

$\mathcal{K}^{op} \models (\forall X)(\exists! f)(f : b \to X)$ (b jest pocz w $\mathcal{K}^{op}$)

CEL b_1, b_2 końcowe w $\mathcal{K} \longrightarrow b_1 \underset{iZO}{\cong} b_2$

D-d: b_1, b_2 - końcowe w $\mathcal{K}$

$\Updownarrow$

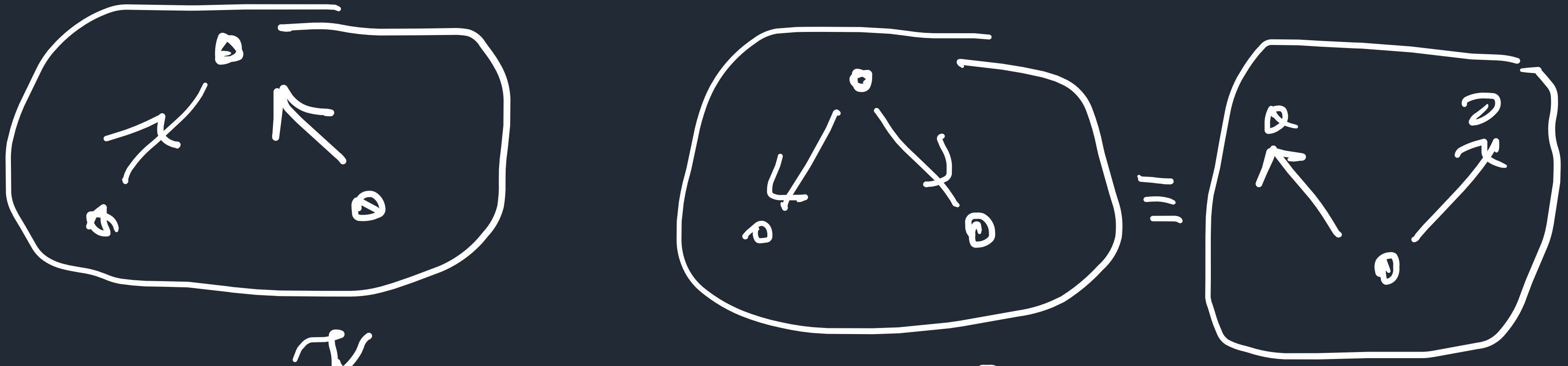
b_1, b_2 - pocz w $\mathcal{K}^{op}$

$\Downarrow$

$b_1 \underset{iZO}{\cong} b_2$ w $\mathcal{K}^{op} \longrightarrow b_1 \underset{iZO}{\cong} b_2$ w $\mathcal{K}$

$\boxtimes$

dualność :



$\mathcal{X}$ $\quad\quad\quad$ $\mathcal{X}^{op}$

DEF. $(X, \cdot, e)$ jest MONOIDEM

|||

1) $\cdot$ – dz. łączne na X
2) e jest elem. neutralnym

$(\forall x)_X \left(e \cdot x = xe = x\right).$

(P) $(\mathbb{N}, +, 0)$ ← monoid

$(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$

Mon : obiekty : wszystkie monoidy

morfizmy : homomorf. monoidów

$f : (X, \circ, e) \longrightarrow (Y, *, \alpha)$

$$\begin{cases} 1)\ f : X \to Y \\ 2)\ f(x \circ y) = f(x) * f(y) \\ 3)\ f(e) = \alpha \end{cases}$$

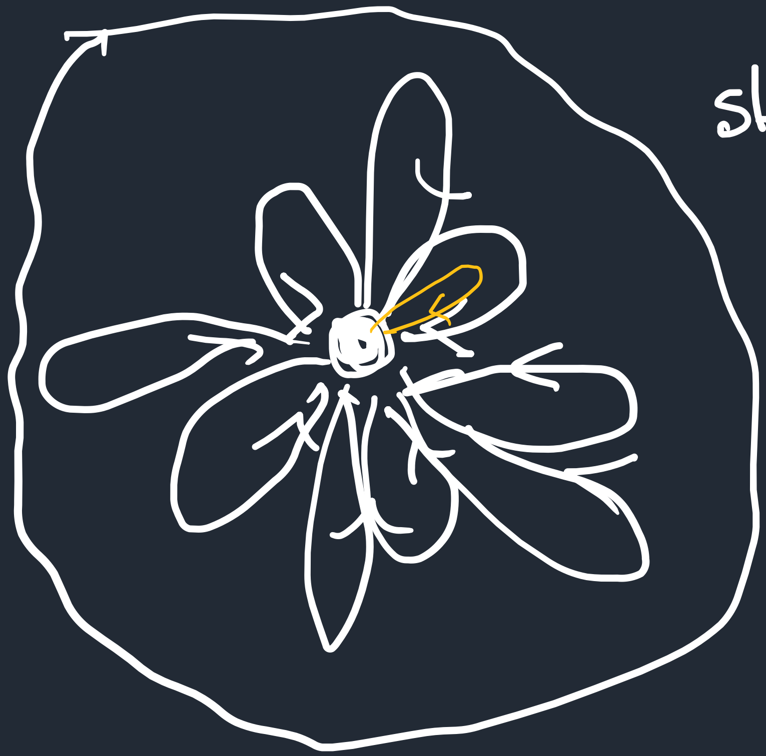
(P) Ustalamy monoid $(X, *, e) = M$

Robimy kategorię : $\mathrm{Mon}(M)$

obiekty : tylko jeden $\bullet$

morfizmy : elementy X

składanie : $x \circ y = x * y$



$id_{\bullet} = e$

check : $id_{\bullet} \circ x = e * x = x$

ZADANIE : mamy kat. z 1 obiektem

ZRÓB Z TEGO MONOID

(P) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ – kategorie.

$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$: obiekty : (X, Y) : $X \in ob(\mathcal{C})$, $Y \in ob(\mathcal{D})$

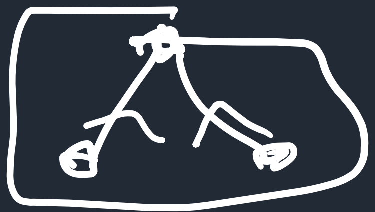
morfizmy : $(f, g) : X \times Y \longrightarrow A \times B$

$\equiv$ $f : X \longrightarrow A$ w $\mathcal{C}$, $g : Y \longrightarrow B$ w $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{c} (X \quad , \quad Y) \\ f \downarrow \quad \Downarrow \quad \downarrow g \\ (A \quad , \quad B) \end{array}$$

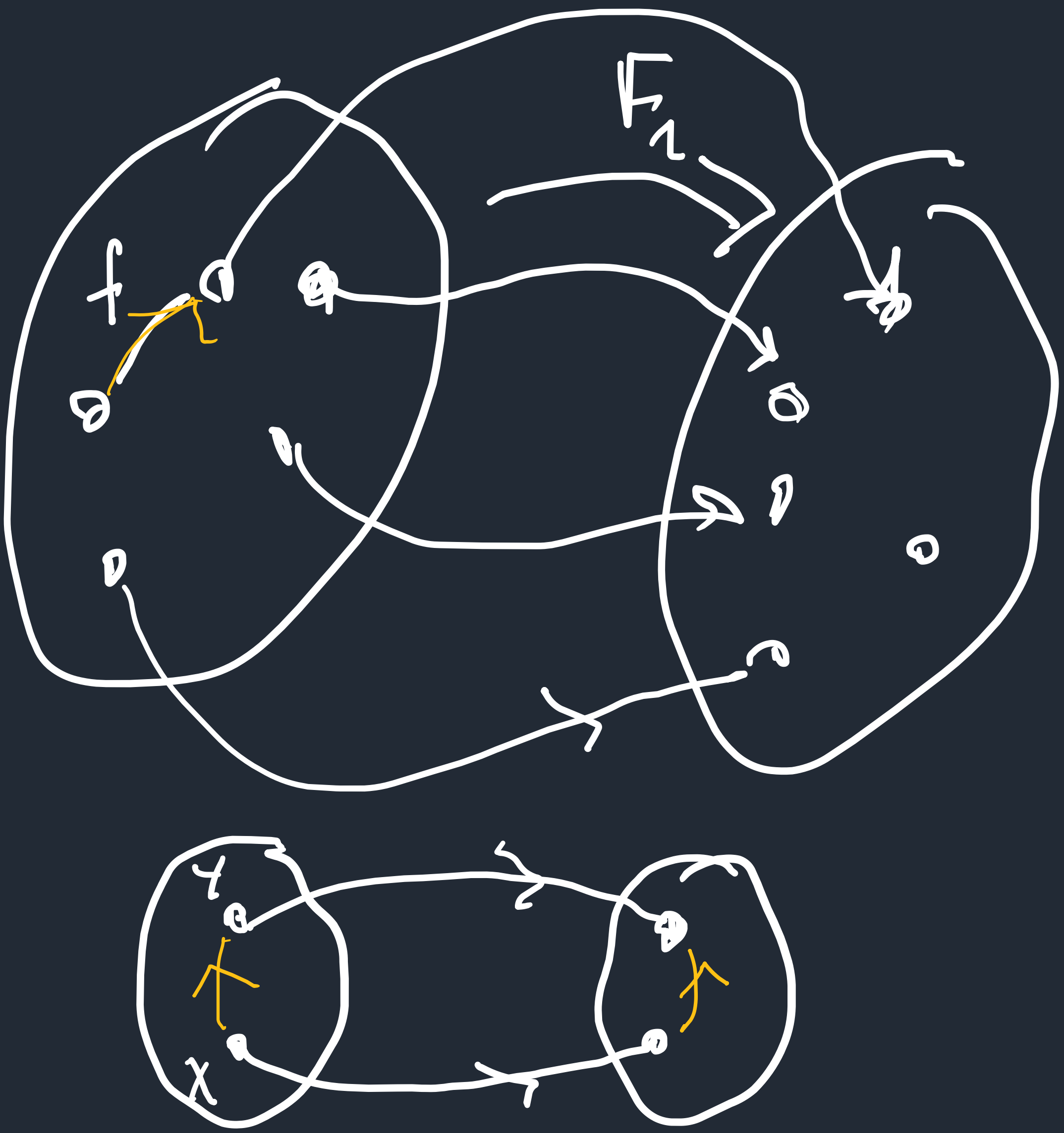
$(X, \circ, e)$

Z. To jest kategoria:

$\Big($  $\times$  $\Big)$

FUNKTORY.

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ – kategorie



$F_1 : ob(\mathcal{C}) \longrightarrow ob(\mathcal{D})$

$F_2 : mor(\mathcal{C}) \longrightarrow mor(\mathcal{D})$

- $f : X \longrightarrow Y$

  $\Downarrow$

  $F_2(f) : F_1(X) \longrightarrow F_1(Y)$

- $F_2(id_X) = id_{F_1(X)}$

- $\underbrace{F_2(f \circ g)}_{\mathcal{C}} = \underbrace{F_2(f) \circ F_2(g)}_{\mathcal{D}}$

P SET MON

$$L_1(X) = (X^*, +, [\,])$$

listy

X^* = wszz. sk. ciągi

$+$ = konkat. ciągów

Set: $f: X \longrightarrow Y$

$$\begin{cases} L_2(f): X^* \longrightarrow Y^* \\ L_2(f)([x_1, \dots, x_n]) = [f(x_1), \dots, f(x_n)] \end{cases}$$

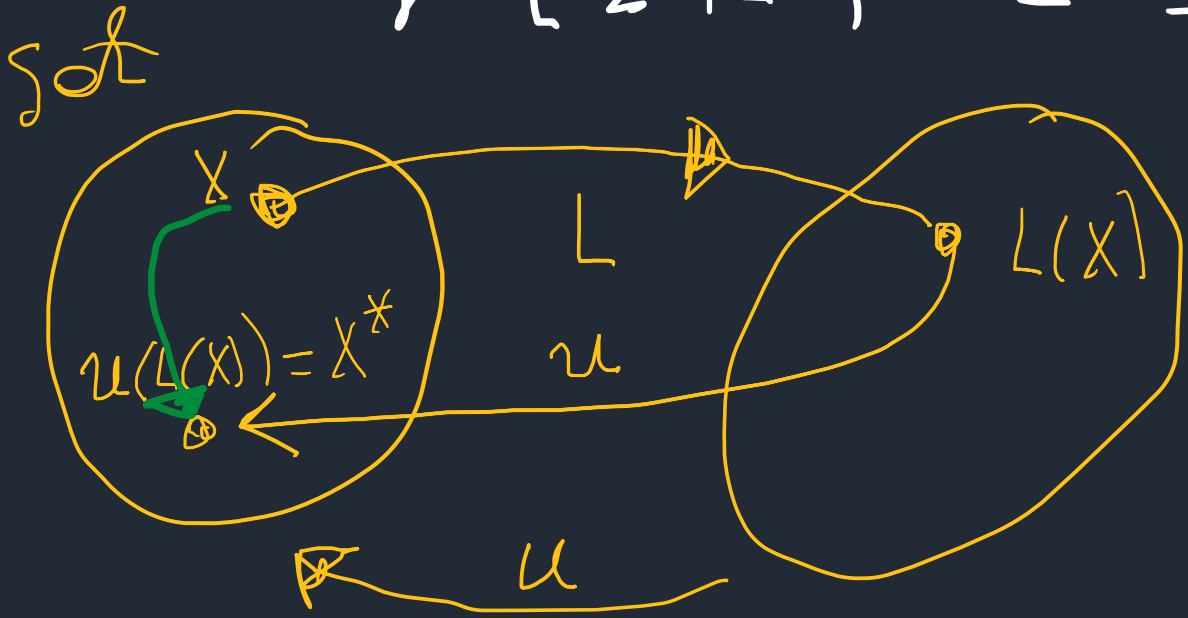
- $L(f)([\,]) = [\,]$
- $L(f)([x_1 \dots x_n] + [y_1 \dots y_n]) = L([x_1 \dots x_n]) + L([y_1 \dots y_n])$

$L = (L_1, L_2)$ — funktor

Progr. $[1,2,3,4,5].\mathrm{map}(\lambda x.\ x \to 2^x)$

$\Rightarrow [2^1, 2^2, \dots 2^5]$

funktor



Mon

" MONADY "

$U : \mathrm{Mon} \longrightarrow \mathrm{Set} : (X, \cdot, e) \longrightarrow X$

$U(f) = f$

ZADANIA NA FUNTORY

$F: SET \longrightarrow SET$ (endofunktory)

- $F(X) = X \times X$
- $G(X) = P(X)$
- $H(X) = X^{\mathbb{N}}$

dodać część funkcyjną

$END(SET) =$ wszystkie endofunkt. SET

F, G - endof $\rightarrow F \circ G \leftarrow$ endof

$1(X) = X \leftarrow$ elem. neutr.