Egzamin z Matematyki Dyskretnej

termin pierwszy

28.06.2021

Niech S będzie sumą ostanich 6 cyfr numeru Twojego indeksu. Oblicz resztę z dzielenia tej liczby przez 3 i dodaj do tej liczby liczbę 1. Otrzymasz w ten sposób liczbę $W \in \{1, 2, 3\}$ i jest to wariant zadań, które będziesz rozwiązywał. W tych obliczeniach nie możesz się pomylić. Uwaga: zadania 4 i 5 nie mają wariantów.

W każdym przysłanym pliku znajdować się ma (na jego początku) imię, nazwisko, numer indeksu oraz wyliczony wariant.

Pewnie to już dobrze wiecie, ale na wszelki wypadek przypominam: wszystkie rozumowania muszą być wyjaśnione (za samą odpowiedź, nawet jeśli jest poprawna, otrzymuje się 0 pkt). Jeśli prześlecie ręcznie zapisane rozwiązania, to pamiętajcie aby dać poprawiającym szansę na ich odczytanie. Oto zasady przeliczania zdobytych punktów na oceny:

Pkt	$\leqslant 3$	4	5	6	7	$\geqslant 8$
Ocena	2	3	3.5	4	4.5	5

Ocena za kurs, to większa z ocen z ćwiczeń i egzaminu (o ile za egzamin otrzymało się co najmniej 3.0). Zacznijcie od przyjrzenia się tej tabelce (macie na to dodatkowe 5 minut) - wynika z niej, że nie musicie rozwiązywać wszystkich zadań.

Zadanie 1 (2 pkt) *Wyznacz zwartą postać następujących sum:*

Wariant 1. $\sum_{k=1}^{n} 2k(k+1)(2k+1)$

Wariant 2. $\sum_{k=1}^{n} 6k(2k+1)(3k+1)$

Wariant 3. $\sum_{k=1}^{n} 6k(2k+1)(3k+2)$

Rozwiązanie należy podać w postaci wielomianu w zmiennej n zapisanego w postaci $w(n) = a_0 + a_1 n + \ldots a_m n^m$.

Zadanie 2 (2 pkt) *Wyznacz zwartą postać następujących sum:*

Wariant 1. $\sum_{k=1}^{n} k(2k+1)\binom{n}{k}$

Wariant 2. $\sum_{k=1}^{n} k(3k+1)\binom{n}{k}$

Wariant 3. $\sum_{k=1}^{n} k(3k+2)\binom{n}{k}$

Zadanie 3 (3 pkt) *Wyznacz moc następującego zbioru:*

Wariant 1. $\{(A,B,C) \in P([n])^3 : A \cap (B \cup C) = \emptyset\}$

Wariant 2. $\{(A,B,C) \in P([n])^3 : (A \cap C = \emptyset) \wedge (B \subseteq C)\}$

Wariant 3. $\{(A,B,C) \in P([n])^3 : (A \subseteq B) \wedge (B \cap C = \emptyset)\}$

Zadanie 4 (4 pkt) *Pokaż, że*

$$\left[\begin{matrix} n \\ n-3 \end{matrix}\right] = \sum_{1 \leqslant a < b < c \leqslant n} abc\ .$$

Zadanie 5 (4 pkt) *Pokaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $2 \leqslant k \leqslant p-1$, to liczba $\left\{\begin{smallmatrix} p \\ k \end{smallmatrix}\right\}$ jest podzielna przez p.*

Powodzenia

Jacek Cichoń