

Wstęp do Logiki i Struktur Formalnych

Lista zadań

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska, WPPT

Wrocław • 2021

G1: Rachunek Zdań

Zadanie 1

Niech π będzie waluacja określona na zbiorze zdań $\{p_1, p_1, p_2, \dots\}$ taką, że $\pi(p_i) = \mathbb{1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy i jest liczbą parzystą. Oblicz

1. $\text{val}(p_0 \rightarrow (p_1 \wedge p_2), \pi)$
2. $\text{val}((p_1 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee p_1), \pi)$
3. $\text{val}(\perp \rightarrow (p_1 \wedge p_2), \pi)$
4. $\text{val}(p_0 \rightarrow (\top \wedge \perp), \pi)$

Zadanie 2

Które z następujących zdania są tautologiami:

1. $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
2. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \leftrightarrow p$
3. $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
4. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
5. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
6. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
7. $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
8. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$

Zadanie 3

Pokaż, że następujące zdania są tautologiami:

1. $(\neg(p_1 \vee \dots \vee p_n)) \leftrightarrow ((\neg p_1) \wedge \dots \wedge (\neg p_n))$
2. $(\neg(p_1 \wedge \dots \wedge p_n)) \leftrightarrow ((\neg p_1) \vee \dots \vee (\neg p_n))$
3. $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow p_4))) \leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4)$

Zadanie 4

Działanie binarne \bullet na zbiorze X nazywamy *łącznym*, jeśli $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$ dla dowolnych $x, y, z \in X$. Działanie \bullet nazywamy *przemienne* jeśli $x \bullet y = y \bullet x$ dla dowolnych $x, y \in X$.

1. Pokaż, że z łączności działania \bullet wynika, że dla dowolnych p, q, r i s ze zbioru X mamy

$$p \bullet (q \bullet (r \bullet s)) = ((p \bullet q) \bullet r) \bullet s = ((p \bullet q) \bullet (r \bullet s)).$$

2. Pokaż, że potęgowanie \wedge określone na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich wzorem $x \wedge y = x^y$ nie jest działaniem łącznym oraz, że nie jest działaniem przemienne.

Zadanie 5

Pokaż, że jeśli średnia arytmetyczna liczb x_1, \dots, x_n jest większa od liczby a , to co najmniej jedna z tych liczb jest większa od liczby a . Przeprowadź dokładną analizę przeprowadzonego rozumowania.

Zadanie 6

Zgodnie z używanym obecnie kalendarzem gregoriańskim:

Rok jest przestępny, jeśli dzieli się przez 4, lecz nie dzieli się przez 100, chyba, że dzieli się przez 400.

Niech p oznacza zdanie „rok R jest podzielny przez 4”, q - „rok R jest podzielny przez 100”, i r - „rok R jest podzielny przez 400”.

1. Zapisz za pomocą zdań p, q i r zdanie „rok R jest przestępny”.
2. Napisz w języku C funkcję służącą do sprawdzania, czy dany rok jest przestępny.
3. Spróbuj zrobić to samo w języku JavaScript.

Zadanie 7

Spójnik *Pierce*, zwany również operatorem NOR, jest zdefiniowany wzorem $p \perp q = (\neg p \wedge \neg q)$. *Kreska Sheffera*, zwana również operatorem NAND, jest zdefiniowana wzorem $p \uparrow q = (\neg p \vee \neg q)$.

1. Wyraż alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą negacji oraz koniunkcji.
2. Wyraż koniunkcję, implikację oraz równoważność za pomocą negacji oraz alternatywy.
3. Wyraż negację, koniunkcję, alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą spójnika *Pierce'a*.
4. Wyraż negację, koniunkcję, alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą kreski *Sheffera*.

Zadanie 8

Spójnik Δ , zwany *operatorem XOR*, jest zdefiniowany wzorem $p \Delta q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

1. Udowodnij łączność oraz przemienność spójnika Δ .
2. Oblicz $p \Delta p, (p \Delta q) \Delta q, p \Delta \perp, p \Delta \top$.
3. Zastanów się jak można wykorzystać własności spójnika Δ do kodowania informacji.

Zadanie 9

Język C posiada następujące operatory logiczne: $\&\&$ (koniunkcja), $\|\|$ (alternatywa) oraz $!$ (negacja). Zdefiniuj w tym języku pozostałe standardowe operatory logiczne.

Zadanie 10

Udowodnij poprawność następujących reguł dowodzenia:

1. $\{p\} \models p$,

2. $\{p, q\} \models p \wedge q$,
3. $\{p \wedge q\} \models p$,
4. $\{p, \neg p\} \models q$,
5. $\{p, p \rightarrow q\} \models q$, (reguła *Modus Ponens*)
6. $\{\alpha \vee p, \neg \alpha \vee q\} \models p \vee q$ (reguła *rezolucji*).

Zadanie 11

Bez korzystania z tabelki zero-jedynkowych pokaż, że

1. $\{p_1, \neg p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee p_3, \neg p_3 \vee p_4\} \models p_4$
2. $\{\neg p_1, p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee p_3, \neg p_3 \vee p_4\} \models p_4$

Zadanie 12

Zapisz w notacji polskiej następujące formuły: $((p \vee q) \vee r) \vee s$, $(p \vee q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$, $(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

* Zadanie 13

Pokaż, że jeśli zdanie jest zbudowane tylko ze stałych zdaniowych \perp i \top , to jest ono tautologią lub zdaniem sprzecznym.

* Zadanie 14

Założmy że $\varphi(p_0, \dots, p_n)$ jest tautologią oraz że ψ_0, \dots, ψ_n są ustalonymi zdaniem. Pokaż, że zdanie $\varphi(\psi_0, \dots, \psi_n)$ jest również tautologią.

Zadanie 15

Niech $\varphi_0 = p$ oraz $\varphi_{n+1} = (\varphi_n) \rightarrow p$ dla liczb naturalnych n . Dla jakich liczb naturalnych n zdanie φ_n jest tautologią?

* Zadanie 16

Ile istnieje nierównoważnych formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennej zdaniowej p ? Ile istnieje nierównoważnych formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennych zdaniowych p, q ?

* Zadanie 17

Ile jest waluacji π określonych dla zmiennych zdaniowych p_1, p_2, \dots, p_n takich, że

1. $\text{val}((p_1 \vee p_2) \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge \dots \wedge p_n, \pi) = \mathbb{1}$
2. $\text{val}((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n), \pi) = \mathbb{1}$

Zadanie 18 (Lewis Carroll)

Pokaż, że z następującego zbioru zdań

1. wszyscy moi synowie są szczupli,
2. wszystkie moje zdrowe dzieci uprawiają sport,
3. żadne moje dziecko które jest łakomczuchem nie jest szczupłe,
4. żadna moja córka nie uprawia sportu

wynika, że “żadne moje zdrowe dziecko nie jest łakomczuchem”.

Wskazówka: Skorzystaj z reguły rezolucji (patrz zadanie 10).

**** Zadanie 19**

Pokaż, że za pomocą koniunkcji i alternatywy nie można zdefiniować negacji. Pokaż, że za pomocą alternatywy i koniunkcji nie można zdefiniować implikacji

*** Zadanie 20**

Zapisz w postaci DNF (dysjunkcyjno normalnej) oraz CNF (koniunkcyjno normalnej) zdanie $(p \leftrightarrow q)$.

Zadanie 21

Definiujemy długość zdania: $l(p) = 1$ dla zmiennych zdaniowych p ; $l(\neg\phi) = l(\phi) + 1$; $l(\phi \wedge \psi) = l(\phi \vee \psi) = l(\phi) + l(\psi) + 1$. Niech $\phi = (p_{11} \wedge p_{12}) \vee (p_{21} \wedge p_{22}) \vee (p_{31} \wedge p_{32}) \vee (p_{41} \wedge p_{42})$.

1. Oblicz $l(\phi)$
2. Przekształć zdanie ϕ do równoważnego zdania ψ w postaci koniunkcyjno-normalnej.
3. Oblicz $l(\psi)$.
4. Spróbuj uogólnić to zadanie.

Zadanie 22

Uprość następujące wyrażenia języka C:

1. `if (!(x>0) || !(x>10)) { ... }`
2. `if ((x<0) || (!(x<0) && (y>0))) { ... }`
3. `if (!(!(x<0) || (y>0))) { ... }`

**** Zadanie 23**

Na pewnej wyspie mieszka dwóch tubylców. Jeden z nich zawsze mówi prawdę, drugi - zawsze kłamie. Na wyspę dostał się wędrowiec. Stał przed rozwidleniem dróg. Spotkał tubylca. Chce dowiedzieć się która z dwóch dróg doprowadzi go do stolicy. Może zadać tylko jedno pytanie. Jak powinien je sformułować?

G2: Zbiory

Zadanie 24

Które z następujących zdań są prawdziwe dla dowolnych zbiorów A, B :

1. $A \cup B = B \cup A$,
2. $A \cup B = B \cap A$,
3. $A \cup (A \cap A) = A \cap A$,
4. $A \Delta A = B \Delta B$,
5. $A \Delta A = (B \Delta B) \Delta A$.

Zadanie 25

Pokaż, że z Aksjomatu Ekstensjonalności wynika, że operacja przekroju jest poprawnie określona. To znaczy, pokaż że jeśli A i B są dowolnymi zbiorami, to istnieje tylko jeden zbiór C taki, że $x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$. Pokaż to samo dla różnicy zbiorów.

Zadanie 26

Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A , B i C prawdziwe są następujące równości:

1. $A \cap A = A$,
2. $A \cup B = B \cup A$,
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
6. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Zadanie 27

Zapisz za pomocą symbolu inkluzji Aksjomat Ekstensjonalności.

Zadanie 28

Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A , B i C prawdziwe są następujące zdania:

1. $A \subseteq A$,
2. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$,
3. $A \subseteq A \cup B$,
4. $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow A \cup B \subseteq C$,
5. $A \cap B \subseteq A$,
6. $(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \rightarrow A \subseteq B \cap C$,
7. $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$,
8. $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$.

Zadanie 29

Niech A i B będą podzbiorem ustalonej przestrzeni Ω . Pokaż, że

1. $(A^c)^c = A$,
2. $A \setminus B = A \cap B^c$,
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
5. $\emptyset^c = \Omega$,
6. $\Omega^c = \emptyset$,
7. $A \subseteq B \rightarrow B^c \subseteq A^c$.

Zadanie 30

Pokaż, że $A \cup B$ jest najmniejszym (w sensie inkluzji) zbiorem zawierającym jednocześnie zbiory A oraz B . Sformułuj i udowodnij analogiczny fakt dla przekroju dwóch zbiorów.

Zadanie 31

Pokaż, że $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ oraz $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ dla dowolnych zbiorów A , B , i C .

Zadanie 32

Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A i B mamy $A \setminus (A \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$.

Zadanie 33

Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A i B prawdziwa jest równość $A = B \leftrightarrow A \setminus B = B \setminus A$.

Zadanie 34

Rozwiąż równanie $[0, 1] \Delta X = [-1, \frac{1}{2})$. Niech $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$ i $C = \{1, 5\}$. Znajdź taki zbiór X , że $(A \Delta X) \Delta B = C$.

Zadanie 35

Dlaczego $\{\emptyset\} \neq \emptyset$? Pokaż, że zbiory \emptyset , $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, ... są parami różne. Wyznacz zbiory $P(\emptyset)$, $P(P(\emptyset))$, $P(\{a, b\})$ i $P(\{a, b, c\})$. Ile elementów mają te zbiory?

Zadanie 36

Niech $S(x) = x \cup \{x\}$. Niech $x_0 = \emptyset$ oraz $x_{n+1} = S(x_n)$ dla wszystkich liczb naturalnych n .

1. Wyznacz x_n dla wszystkich $n \leq 5$.
2. Pokaż, że jeśli $n < m$ to $x_n \in x_m$.
3. Pokaż, że $x_{n+1} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Uwaga: Metodą tą można zdefiniować liczby naturalne za pomocą zbiorów.

Zadanie 37

Czy iloczyn kartezjański jest operacją łączną? Czy jest przemienne? Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A , B i C prawdziwe są następujące równości:

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Zadanie 38

Pokaż, że $A \times B = B \times A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

Zadanie 39

Pokaż, że $A \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A) \subseteq P(B)$. Czy dla dowolnych zbiorów A i B prawdziwe są równości $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ i $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$?

Zadanie 40

Niech $A, B \subseteq \Omega$. Opisz rodzinę wszystkich zbiorów które mogą zostać zdefiniowane ze zbiorów A i B za pomocą operacji sumy, przekroju i dopełnienia.

Zadanie 41

Niech $A = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 7, 8\}$ i $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Ile różnych zbiorów możesz zbudować za pomocą operacji \cup , \cap , c ze zbiorów A , B i C ? Czy zbiór $\{8\}$ należy do tej rodziny zbiorów?

Zadanie 42

Zapisz w postaci "nawiasowej" wyrażenia $ABC \cup \cup$, $AB \cup C \cup$ oraz $ABC \cup \cup AB \cup C \cup =$.

Zadanie 43

Niech $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ będą funkcjami zdaniowymi określonymi dla elementów przestrzeni Ω . Pokaż, że

1. $\{x \in \Omega : \varphi(x)\}^c = \{x \in \Omega : \neg\varphi(x)\}$,
2. $\{x \in \Omega : \varphi(x) \wedge \psi(x)\} = \{x \in \Omega : \varphi(x)\} \cap \{x \in \Omega : \psi(x)\}$,
3. $\{x \in \Omega : \varphi(x) \vee \psi(x)\} = \{x \in \Omega : \varphi(x)\} \cup \{x \in \Omega : \psi(x)\}$.

* Zadanie 44

Pokaż, że dla każdego zbioru A zachodzi nierówność $A \neq P(A)$.

* Zadanie 45

Pokaż, że nie istnieje taki zbiór Ω , że $A \subseteq \Omega$ dla dowolnego zbioru A .

Zadanie 46

Jak można zaimplementować działania na podzbiorach zbioru $\{0, \dots, 255\}$?

G3: Kwantyfikatory

Zadanie 47

Zakresem zmienności zmiennych jest zbiór liczb naturalnych. Zapisz przy użyciu symboli $0, 1, +, \cdot, \leq, |$ oraz symboli logicznych następujące funkcje zdaniowe:

1. x jest liczbą parzystą,
2. x jest liczbą pierwszą,
3. x jest liczbą złożoną,
4. $x = NWD(y, z)$,
5. każde dwie liczby mają najmniejszą wspólną wielokrotność,
6. nie istnieje największa liczba pierwsza.
7. każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych (*hipoteza Goldbacha*)
8. każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych (*twierdzenie Lagrange'a*)

Zadanie 48

Niech zakresem zmienności zmiennych jest zbiór liczb rzeczywistych. Zapisz za pomocą symboli logicznych oraz symboli $=, <, \leq, +, \cdot$ i \mathbb{Q} następujące formuły:

1. kwadrat każdej liczby jest nieujemny,
2. liczba a jest ograniczeniem górnym zbioru A ,
3. liczba a jest kresem górnym zbioru A ,
4. pomiędzy dowolnymi dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi istnieje liczba wymierna,
5. funkcja f jest malejąca.

Zadanie 49

Znajdź wykresy następujących formuł zmiennych x i y , o zakresie zmienności równym \mathbb{R}^2 :
 $x = y, x < y, x \leq y, x \cdot y < 1, |x \cdot y| < 1, (x \leq 0) \vee (x = y), x \cdot y < 1 \rightarrow x \cdot y = 1$.

Zadanie 50

Zapisz za pomocą kwantyfikatorów zdanie “ g jest granicą ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ”.

1. Zastosuj prawa de'Morgana do uproszczenia negacji tego zdania.
2. Pokaż, że liczba 1 nie jest granicą ciągu $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Zadanie 51

Niech predykat $r(x, y)$ oznacza, że x jest rodzicem y , niech $m(x)$ oznacza, że x jest mężczyzną. Zdefiniuj za pomocą formuł r oraz m następujące formuły:

1. "x jest bratem y"
2. "x jest kuzynką y"
3. "x jest pradziadkiem y"

Zadanie 52

Dla każdej liczby rzeczywistej t niech $A_t = \{(x, tx) : x \in \mathbb{R}\}$. Niech $\mathcal{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$. Wyznacz zbiór $\bigcup \mathcal{A}$.

Zadanie 53

Pokaż, że dla dowolnych dwóch rodzin zbiorów \mathcal{A} i \mathcal{B} zachodzi równość $\bigcup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \bigcup \mathcal{A} \cup \bigcup \mathcal{B}$.

Zadanie 54

Załóż że Ω jest zbiorem skończonym i niech $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Pokaż, że

1. $(\forall x)(\forall y)\psi(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^n \psi(\omega_i, \omega_j)$,
2. $(\forall x)(\exists y)\psi(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^n \psi(\omega_i, \omega_j)$,
3. $(\exists x)(\exists y)\psi(x, y) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^n \psi(\omega_i, \omega_j)$,

Zadanie 55

Rozstrzygnij, który z graczy ma strategię zwycięską w grze „trzech zapalek” zaczynającą się od 30 zapalek. Opisz tę strategię.

* Zadanie 56

Pokaż, że jeśli $a, b \in A$ to $(a, b) \in P(P(A))$. Wykorzystaj tę obserwację do zdefiniowania iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów A i B za pomocą operacji zbioru potęgowego oraz wyróżniania.

* Zadanie 57

Określmy następujące dwa kwantyfikatory stosowane do liczb naturalnych:

$$(\forall^\infty n)\psi(n) \leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n > k)\psi(n)$$

oraz

$$(\exists^\infty n)\psi(n) \leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(\exists n > k)\psi(n).$$

1. Sformułuj i udowodnij prawa de Morgana dla tych kwantyfikatorów.
2. Pokaż, że dla dowolnej formuły ψ zdanie

$$(\forall^\infty n)\psi(n) \rightarrow (\exists^\infty n)\psi(n)$$

jest prawdziwe.

3. Sformułuj przy pomocy tych kwantyfikatorów pojęcie granicy ciągu oraz pojęcie punktu skupienia.
4. Bezpośrednio z własności tych kwantyfikatorów pokaż, że granica ciągu jest jego punktem skupienia.

Zadanie 58

Pokaż, że dla każdego zbioru A zachodzi równość $A = \bigcup P(A)$.

*** Zadanie 59**

Niech zakresem zmienności zmiennych będzie zbiór liczb całkowitych. Zapisz za pomocą symboli logicznych oraz symboli $+$, \cdot predykat „ $x \geq 0$ ”.

Wskazówka: Zapoznaj się z twierdzeniem Lagrange'a o sumach czterech kwadratów.

***** Zadanie 60**

Niech zakresem zmienności zmiennych będzie zbiór liczb naturalnych. Pokaż, że za pomocą symboli 0 , 1 , $+$ oraz $|$ można zdefiniować predykat „ $x \cdot y = z$ ” (symbol $|$ oznacza podzielność bez reszty).

Wskazówka: Zdefiniuj najpierw predykat $(\exists y)(x = y^2)$. Przydać ci się mogą następujące tożsamości: $(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2$, $NWD(x, x + 1) = 1$ oraz $x^2 + x = NWW(x, x + 1)$, gdzie NWD oznacza największy wspólny dzielnik, NWW oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność.

Zadanie 61

Wymień wszystkie poznane do tej pory warianty praw de'Morgana.

G4: Relacje i funkcje

Zadanie 62

Podaj przykład relacji która jest symetryczna, ale nie jest zwrotna ani przechodnia.

Zadanie 63

Pokaż, że relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$. Pokaż, że relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{-1} = R$.

Zadanie 64

Niech $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$ oraz $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(x)\}$. Narysuj wykres relacji R , Q , $R \circ Q$ oraz $Q \circ R$.

Zadanie 65

Niech $R = \{(n, n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$. Wyznacz najmniejszą relację przechodnią na zbiorze liczb naturalnych \mathbb{N} zawierającą relację R .

Zadanie 66

Niech $R = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x < y\}$.

1. Wyznacz relację $R \circ R$.
2. Wyznacz relację $R \circ R^{-1}$.

3. Wyznacz relację $R^{-1} \circ R$.

Zadanie 67

Wyznacz zbiory \emptyset^\emptyset , X^\emptyset oraz \emptyset^X , gdzie X jest dowolnym zbiorem niepustym.

Zadanie 68

Niech f będzie funkcją różnowartościową. Pokaż, że wtedy dla dowolnych zbiorów A i B mamy $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$. Sformułuj i udowodnij twierdzenie odwrotne.

Zadanie 69

Niech f będzie funkcją. Pokaż, że następujące dwa zdania są równoważne:

1. $(\forall A, B)(f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B])$,
2. f jest injekcją

Zadanie 70

Niech $f : B \rightarrow C$ będzie funkcją. Pokaż, że następujące dwa zdania są równoważne:

1. f jest injekcją
2. $(\forall A)(\forall g, h : A \rightarrow B)(f \circ g = f \circ h \rightarrow g = h)$

Wskazówka: Własność (2) wykorzystuje się do zdefiniowania pojęcia monomorfizmu w Teorii Kategorii.

Zadanie 71

Niech $f : A \rightarrow B$ będzie funkcją. Pokaż, że następujące dwa zdania są równoważne:

1. f jest surjekcją (na B)
2. $(\forall C)(\forall g, h : B \rightarrow C)(g \circ f = h \circ f \rightarrow g = h)$

Wskazówka: Własność (2) wykorzystuje się do zdefiniowania pojęcia epimorfizmu w Teorii Kategorii.

Zadanie 72

Niech f będzie funkcją i A dowolnym zbiorem. Pokaż, że $f \upharpoonright A$ również jest funkcją oraz, że $\text{dom}(f \upharpoonright A) = \text{dom}(f) \cap A$.

Zadanie 73

Niech f i g będą funkcjami. Pokaż, że $f \cup g$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f \upharpoonright (\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)) = g \upharpoonright (\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)) .$$

* Zadanie 74

Niech \mathcal{F} będzie dowolną rodziną funkcji. Pokaż, że $\bigcup \mathcal{F}$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall f, g \in \mathcal{F})(f \cup g \text{ jest funkcją}) .$$

Zadanie 75

Znajdź bijekcje pomiędzy następującymi parami zbiorów:

1. \mathbb{N} i \mathbb{Z} ,
2. $(0, 1)$ i $(3, 5)$,
3. $(0, 1)$ i \mathbb{R} ,
4. $(0, 1)$ i \mathbb{R}^+ ,
5. $[0, 1]$ i $[0, 1)$.

Zadanie 76

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f((x, y)) = (x + y, x - y).$$

Czy odwzorowanie f jest injekcją? Czy odwzorowanie f jest surjekcją? Znajdź $f[\mathbb{R} \times \{0\}]$, $f[L]$ oraz $f^{-1}[L]$, gdzie L jest prostą zadaną równaniem $y = x + 1$.

Zadanie 77

Niech $(A_t)_{t \in T}$ będzie rodziną zbiorów i niech f będzie funkcją. Pokaż, że

1. $f[\bigcup_{t \in T} A_t] = \bigcup_{t \in T} f[A_t]$,
2. $f[\bigcap_{t \in T} A_t] \subseteq \bigcap_{t \in T} f[A_t]$,
3. $f^{-1}[\bigcup_{t \in T} A_t] = \bigcup_{t \in T} f^{-1}[A_t]$,
4. $f^{-1}[\bigcap_{t \in T} A_t] = \bigcap_{t \in T} f^{-1}[A_t]$.

Zadanie 78

Ustalmy zbiór Ω . Funkcją charakterystyczną zbioru $A \subseteq \Omega$ nazywamy funkcję $\mathbf{1}_A$ określoną wzorem $\mathbf{1}_A = (A^c \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$. Dlaczego funkcję $\mathbf{1}_A$ nazywa się czasem mapą bitową zbioru A ? Pokaż, że dla podzbiorów A, B przestrzeni Ω zachodzą następujące wzory: $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{A \cup B} = 1 - (1 - \mathbf{1}_A) \cdot (1 - \mathbf{1}_B)$

Zadanie 79

Niech $f : \{0, 1\}^{10} \rightarrow \{0, 1\}$ będzie funkcją tożsamościowo równą $\mathbb{1}$. Zastosuj do funkcji f uniwersalną metodę wyznaczenia zdania φ takiego, że $f = F_\varphi$ i wyznacz jego długość uwzględniając ilość zmiennych zdaniowych, spójników i nawiasów.

Zadanie 80

Ile istnieje nierównoważnych formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennych zdaniowych p_1, \dots, p_n ?

Wskazówka: Ile możesz zbudować różnych "tabelk zero-jedynkowych" dla n zmiennych zdaniowych?.

Zadanie 81

Niech $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < n|x|\}$ oraz $B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x \cdot y\}$. Oblicz $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ oraz $\bigcup_{n \geq 1} B_n$.

Zadanie 82

Niech $A_n = [-2 + (-1)^n, n)$. Oblicz $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m > n} A_m$ oraz $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m > n} A_m$.

Zadanie 83

Niech $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem zbiorów.

1. Pokaż, że $x \in \liminf_{n \in \mathbb{N}} F_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall^\infty n)(x \in F_n)$ oraz $x \in \limsup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\exists^\infty n)(x \in F_n)$ (patrz Zadanie 57).
2. Korzystając z powyższych obserwacji udowodnij, że

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq \liminf_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq \limsup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

3. Podaj przykład ciągu zbiorów $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dla którego wszystkie inkluzje w powyższym wzorze są właściwe.

Zadanie 84

Ustalmy zbiory A, B i C . Niech $A_{3n} = A, A_{3n+1} = B$ oraz $A_{3n+2} = C$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n, \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Kiedy ciąg $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny?

Zadanie 85

Niech $(A_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$ będzie dowolną indeksowaną rodziną zbiorów. Pokaż, że

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}.$$

Zadanie 86

Założmy, że $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych. Pokaż, że wtedy $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Zadanie 87

Założmy, że $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest malejącą rodziną zbiorów, czyli, że $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ oraz, że $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Pokaż, że wtedy

$$A_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1}).$$

* Zadanie 88

Funkcję logiczną f nazywamy monotoniczną jeśli zmiana dowolnego argumentu z \emptyset na $\mathbb{1}$ nie powoduje zmiany wartości funkcji z $\mathbb{1}$ na \emptyset . Pokaż, że jeśli f jest monotoniczną funkcją logiczną, to jest ona funkcją stałą lub może zostać przedstawiona jako formuła zbudowana wyłącznie ze zmiennych oraz spójników \wedge i \vee .

* Zadanie 89

Na przyjęciu jest sześć osób. Pokaż, że jest trójka osób znajomych lub, że jest trójka osób którzy się nie znają (uwaga: zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to i osoba B zna osobę A).

G5: Relacje równoważności

Zadanie 90

Na zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} określamy relację $x \approx y \leftrightarrow (x - y \in \mathbb{Z})$.

1. Pokaż, że \approx jest relacją równoważności
2. Wyznacz klasę abstrakcji $[\sqrt{2}]_{\approx}$.
3. Opisz klasę abstrakcji dowolnego elementu $a \in \mathbb{R}$.
4. Spróbuj samodzielnie uogólnić to zadanie.

Zadanie 91

Dla $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in [0, 1]^2$ określamy relację

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \leftrightarrow u(x_1) = u(y_1) \wedge u(x_2) = u(y_2),$$

gdzie $u(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Pokaż, że \sim jest relacją równoważności.
2. Wyznacz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 92

Pokaż, że następujące relacje są relacjami równoważności na zbiorze X i wyznacz ich klasy abstrakcji:

1. $X = \mathbb{N}^2; (x, y) \approx (a, b) \leftrightarrow x + y = a + b$,
2. $X = \mathbb{N}^2; (x, y) \approx (a, b) \leftrightarrow \max\{x, y\} = \max\{a, b\}$,
3. $X = \mathbb{R}; x \approx y \leftrightarrow (\exists t \neq 0)(tx = y)$,
4. $X = \mathbb{R}; x \approx y \leftrightarrow (\exists t > 0)(tx = y)$,
5. $X = \mathbb{R}^2; x \approx y \leftrightarrow (\exists t \neq 0)(tx = y)$,
6. $X = \mathbb{R}^2; x \approx y \leftrightarrow (\exists t > 0)(tx = y)$.

Zadanie 93

Jaka jest najmniejsza w sensie inkluzji relacja równoważności n zbiorze X ? Jaka jest największa w sensie inkluzji relacja równoważności n zbiorze X ?

Zadanie 94

Ile jest relacji równoważności na zbiorze $\{1, 2, 3\}$? Ile jest różnych rozbić zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$?

Zadanie 95

Na zbiorze $[0, 8)^2$ określamy następującą relację równoważności

$$(a, b) \approx (c, d) \leftrightarrow [a] = [c] \wedge [b] = [d],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x . Niech

$$T = \{(n, m) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}^2 : 2|n + m\}.$$

Narysuj zbiór

$$\bigcup_{(n,m) \in T} [(n, m)]_{\approx}.$$

Zadanie 96

Na zbiorze liczb całkowitych \mathbb{Z} określamy relacje $x \equiv y \leftrightarrow 3|(x + 2y)$ oraz $x \simeq y \leftrightarrow 5|x^2 - y^2$. Czy są to relacje równoważności?

Zadanie 97

Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy relacją równoważności \approx formułą

$$(x, y) \approx (x', y') \leftrightarrow \max\{x, y\} = \max\{x', y'\}.$$

Ile elementów ma klasa abstrakcji $[(0, 20)]_{\approx}$?

Zadanie 98

Niech $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ będzie grupą oraz niech $H \subseteq G$ będzie podgrupą grupy \mathcal{G} . Na zbiorze G określamy relację \sim_H wzorem

$$x \sim_H y \leftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

Pokaż, że \sim_H jest relacją równoważności. Opisz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 99

Pokaż, że jeśli R i S są relacjami równoważności na zbiorze Ω , to również $R \cap S$ jest relacją równoważności na zbiorze Ω . Opisz klasy abstrakcji relacji $R \cap S$.

Zadanie 100

Pokaż, że przekrój dowolnej rodziny relacji równoważności na zbiorze X jest również relacją równoważności na zbiorze X .

Zadanie 101

Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy relacje R i S wzorami

$$(n, m)R(n', m') \leftrightarrow n = n'$$

oraz

$$(n, m)S(n', m') \leftrightarrow m = m'.$$

Wyznacz najmniejszą relację równoważności zawierającą relację $R \cup S$.

G6: Częściowe porządki

Zadanie 102

Pokaż, że $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ jest częściowym porządkiem. Znajdź w nim element najmniejszy. Znajdź elementy minimalne w częściowym porządku $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$.

Zadanie 103

Na zbiorze $X = \{10, 11, \dots, 30\}$ określamy relację $(x \preceq y) \leftrightarrow (x|y)$. Wyznacz elementy maksymalne i minimalne w częściowym porządku (X, \preceq) .

Zadanie 104

Pokaż, że jeśli w częściowym porządku istnieje element największy, to jest on jedynym elementem największym i jest elementem maksymalnym.

Zadanie 105

Pokaż, że jeśli R i S są częściowymi porządkami, to ich przekrój $R \cap S$ też jest częściowym porządkiem. Czy ich suma $R \cup S$ musi być częściowym porządkiem?

Zadanie 106

Niech R będzie częściowym porządkiem na zbiorze X . Niech $Y \subseteq X$ oraz $S = R \cap (Y \times Y)$. Pokaż, że S jest częściowym porządkiem na zbiorze Y .

Zadanie 107

Dla danych liczb $n, m \in \mathbb{N}$ podaj przykład częściowego porządku który ma dokładnie n elementów minimalnych oraz m elementów maksymalnych.

Zadanie 108

Podaj przykład częściowego porządku który ma dokładnie jeden element maksymalny oraz nie ma elementu największego.

Zadanie 109

Niech (X, R) będzie częściowym porządkiem. Pokaż, że relacja R^{-1} jest również częściowym porządkiem na zbiorze X . Jakie są związki pomiędzy elementami maksymalnymi, minimalnymi, największymi i najmniejszymi w tych dwóch częściowych porządkach?

Zadanie 110

Niech (X, \preceq) będzie liniowym porządkiem. Pokaż, że jeśli $a \in X$ jest elementem \preceq -maksymalnym, to a jest również elementem \preceq -największym.

Zadanie 111

Pokaż, że nie istnieje liniowy porządek \preceq na zbiorze liczb zespolonych \mathbb{C} o następujących własnościach:

1. $(\forall a, b, x, y \in \mathbb{C}) ((a \preceq b) \wedge (x \preceq y) \rightarrow a + x \preceq b + y)$,
2. $(\forall a, b \in \mathbb{C}) ((0 \preceq a) \wedge (0 \preceq b) \rightarrow 0 \preceq a \cdot b)$.

Zadanie 112

Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem. Pokaż, że porządki $(P(A), \subseteq)$ i $(\{0, 1\}^A, \leq^*)$, gdzie $f \leq^* g \leftrightarrow (\forall a \in A)(f(a) \leq g(a))$, są izomorficzne.

Zadanie 113

Na zbiorze \mathbb{R}^2 rozważamy relację \preceq zadaną formułą

$$((x, y) \preceq (x', y')) \leftrightarrow (x \leq x') \wedge (y \leq y').$$

Niech $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Pokaż, że relacja \preceq jest częściowym porządkiem.
2. Wyznacz elementy minimalne zbioru K .
3. Dla ustalonego punktu $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ wyznacz zbiory $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) \leq (x, y)\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \leq (a, b)\}$ oraz $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \neg((a, b) \leq (x, y)) \wedge \neg((x, y) \leq (a, b))\}$.

Zadanie 114

Niech $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$. Na zbiorze K określamy relację

$$(x, y) \preceq (x', y') \leftrightarrow ((x < x') \vee (x = x' \wedge y \leq y')).$$

Pokaż, że \preceq jest liniowym porządkiem na zbiorze K oraz wyznacz elementy minimalne w tym porządku.

Zadanie 115

Rozważmy częściowy porządek (\mathbb{R}, \leq) . Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ będą zbiorami ograniczonymi. Pokaż, że $\inf(A) = -\sup(\{-a : a \in A\})$ oraz $\sup(\{a+b : a \in A \wedge b \in B\}) = \sup(A) + \sup(B)$.

Zadanie 116

Niech $\Omega = \{a, b\}$ oraz niech X będzie zbiorem wszystkich słów z Ω^* długości nie większej niż 3. Wypisz elementy tego zbioru w porządku leksykograficznym.

Zadanie 117

Niech Ω będzie niepustym zbiorem. Na zbiorze słów Ω^* definiujemy relację $\sigma \approx \eta \leftrightarrow |\sigma| = |\eta|$, gdzie $|x|$ oznacza długość słowa x . Pokaż, że \approx jest relacją równoważności. Wyznacz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 118

Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje zbiór liczb naturalnych T taki, że częściowe porządki $(P(\{1, \dots, n\}), \subseteq)$ oraz $(T, |)$ są izomorficzne

Zadanie 119

Niech L_1 oznacza zbiór wszystkich zdań zbudowanych z jednej zmiennej zdaniowej p . Na zbiorze L_1 określamy relację $\varphi \leq \psi \leftrightarrow \models (\varphi \rightarrow \psi)$. Pokaż, że \leq jest preporządkiem. Niech \equiv będzie relacją równoważności wyznaczoną przez ten preporządek oraz niech \preceq będzie częściowym porządkiem na L_1/\equiv wyznaczonym przez \leq . Pokaż, że porządek $(L_1/\equiv, \preceq)$ jest izomorficzny z porządkiem $\mathcal{P}(\{0, 1\})$.

* Zadanie 120

Załóżmy, że (X, \leq) jest dobrym porządkiem o następujących własnościach: nie ma w nim elementu największego, dla każdego elementu, z wyjątkiem najmniejszego, istnieje element bezpośrednio go poprzedzający. Pokaż, że porządek (X, \leq) jest izomorficzny z liczbami naturalnymi z naturalnym porządkiem.

* Zadanie 121

Załóżmy, że $f : A \rightarrow B$ jest surjekcją. Pokaż, korzystając z Aksjomatu Wyboru, że istnieje taka funkcja $g : B \rightarrow A$, że $(\forall y \in B)(f(g(y)) = y)$.

Zadanie 122

Niech $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb naturalnych. Pokaż, że istnieją liczby $n, m \in \mathbb{N}$ takie, że $n < m$ oraz $x_n \leq x_m$ i $y_n \leq y_m$.

Zadanie 123

Podaj przykład iniekcji $f : \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$.

G7: Aksjomat Wyboru

Zadanie 124

Na zbiorze $X = \mathbb{R}^2$ rozważamy relację równoważności określoną wzorem $x \approx y \leftrightarrow (\exists t \neq 0)(tx = y)$ (patrz Zadanie 92). Znajdź jakiś naturalny (prosty do opisanie) selektor rodziny X/\approx .

Zadanie 125

Na zbiorze \mathbb{R} rozważamy relację określoną wzorem $x \approx y \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że jest to relacja równoważności oraz znajdź jakiś naturalny selektor rodziny \mathbb{R}/\approx .

Zadanie 126

W którym momencie dowodu równoważności definicji Heinego i Cauchy'ego ciągłości funkcji korzystamy z Aksjomatu Wyboru?

** Zadanie 127

Pokaż, że w każdej przestrzeni liniowej istnieje baza.
Wskazówka: skorzystaj z Lematu Kuratowskiego Zorna.

Zadanie 128

Znajdź liniowy porządek \preceq na zbiorze $P(\{a, b, c\})$ taki, że

$$(\forall X, Y \in P(\{a, b, c\}))(X \subseteq Y \rightarrow X \preceq Y).$$

** Zadanie 129

Pokaż, korzystając z Lematu Kuratowskiego-Zorna, że każdy częściowy porządek można rozszerzyć do porządku liniowego.

Zadanie 130

Niech \mathcal{A} będzie rodziną niepustych, parami rozłącznych podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Pokaż, bez pomocy Aksjomatu Wyboru, że rodzina \mathcal{A} ma selektor.

G8: Indukcja Matematyczna

Zadanie 131

Wyznacz moc zbioru $A = \{k \in \{1, \dots, 1000\} : 2|k \vee 5|k\}$.

Zadanie 132

Uogólnij wzór $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na trzy i cztery zbiory.

* Zadanie 133

Uogólnij wzór $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na dowolną skończoną ilość zbiorów.

Zadanie 134

Niech $\mathcal{A} = \{A \in P(\{1, \dots, 10\}) : 2 \leq |A| \leq 7\}$. Ile jest elementów minimalnych oraz ile jest elementów maksymalnych w częściowym porządku (\mathcal{A}, \subseteq) ?

Zadanie 135

Pokaż, że w każdym skończonym częściowym porządku istnieje element maksymalny.

Zadanie 136

Pokaż, że jeśli skończony porządek ma tylko jeden element maksymalny, to jest on elementem największym.

Zadanie 137

Pokaż, że jeśli każdy skończony porządek można rozszerzyć do porządku liniowego. Podaj oszacowania na liczbę tych rozszerzeń.

Zadanie 138

Niech $A = \{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ oraz $R = \{(x, 0), (x, 1) : 1 \leq x \leq n\} \cup id_A$. Na ile sposobów można rozszerzyć relację R do liniowego porządku?

Zadanie 139

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona wyznacz następujące sumy:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}, \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i}, \quad \sum_{i=0}^n 2^i \binom{n}{i}, \quad \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}.$$

Wskazówka: Do wyznaczenia ostatniej sumy możesz skorzystać z tego, że $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$.

Zadanie 140

Za pomocą formuły Stirlinga $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ oszacuj liczbę $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x .

Zadanie 141

Pokaż, że jeśli $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ jest injekcją, to funkcja f jest również surjekcją. Pokaż, że jeśli $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ jest surjekcją, to funkcja f jest również injekcją.

Zadanie 142

Ile jest waluacji $\pi : \{p_0, p_1, \dots, p_{10}\} \rightarrow \{0, 1\}$ takich, że $\pi \models p_0 \rightarrow (p_1 \wedge \dots \wedge p_{10})$?

Zadanie 143

Wyznacz liczbę przekątnych w n -kącie wypukłym.

Zadanie 144

Ile jest relacji zwrotnych, symetrycznych, słabo antysymetrycznych na zbiorze n elementów?

Zadanie 145

Ile jest relacji które są jednocześnie zwrotne i symetryczne na zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$?

Zadanie 146

Relację R nazywamy *antysymetryczną*, jeśli

$$(\forall x, y)((x, y) \in R \rightarrow (x, y) \notin R).$$

Ile jest relacji antysymetrycznych na zbiorze n - elementowym?

Zadanie 147

Relację R nazywamy *żałosną*, jeśli

$$(\forall x, y)((x, y) \in R \rightarrow x = y).$$

Ile jest relacji żałosnych na zbiorze n - elementowym?

Zadanie 148

Niech $S = \{X \subseteq \{1, \dots, 9\} : 2 \mid |X|\}$. Jaka jest moc rodziny zbiorów S ?

Zadanie 149

Pokaż, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku 2 rozmieścimy dowolnie pięć punktów, to dwa z nich są odległe nie więcej niż o 1.

Wskazówka: Zastosuj zasadę szufladkową Dirichleta.

Zadanie 150

Pokaż, że w każdej szóstce liczb ze zbioru $\{1, \dots, 10\}$ istnieją dwie liczby których suma jest nieparzysta.

Wskazówka: Przyjrzyj się rozbięciu $\{1, \dots, 10\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Zadanie 151

Niech x_1, \dots, x_n będzie ciągiem liczb całkowitych. Pokaż, że suma pewnej liczby kolejnych wyrazów tego ciągu jest podzielna przez liczbę n .

Wskazówka: Rozważ liczby $s_k = (x_1 + \dots + x_k) \pmod n$.

Zadanie 152

Czy szachownicę z usuniętymi naprzeciwległymi narożnikami można pokryć kostkami domina o powierzchni równej dwóm kwadratam szachownicy?

Wskazówka: Pomaluj rozsądnie szachownicę.

Zadanie 153

Pokaż, że istnieje potęga liczby 3, której rozwinięcie dziesiętne kończy się cyframi 001.

Wskazówka: Rozważ ciąg liczb $a_n = 3^n \pmod{10^3}$.

Zadanie 154

Niech $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ będzie zbiorem o mocy $|A| > n$. Pokaż, że istnieją dwie różne liczby $a, b \in A$ takie, że a dzieli b .

Wskazówka: Rozważ funkcję $f(x) = \max\{k : k \mid x \wedge \neg(2 \mid k)\}$.

** Zadanie 155 (Erdős–Szekeres)

Niech x_1, \dots, x_{mn+1} będzie ciągiem różnych liczb rzeczywistych. Pokaż, że z ciągu tego można wybrać podciąg rosnący długości $m + 1$ lub podciąg malejący długości $n + 1$.

Wskazówka: Każdej liczbie $k \in \{1, \dots, nm + 1\}$ przyporządkuj parę liczb (a_k, b_k) , gdzie a_k = długość najdłuższego rosnącego podciągu kończącego się w x_k zaś b_k = długość najdłuższego malejącego podciągu kończącego się w x_k .

Zadanie 156

Niech \mathcal{A} będzie skończoną rodziną niepustych, parami rozłącznych zbiorów. Pokaż, bez pomocy Aksjomatu Wyboru, że rodzina \mathcal{A} ma selektor.

Zadanie 157

Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ będzie skończoną rodziną niepustych, parami rozłącznych skończonych zbiorów. Wyznacz moc zbioru wszystkich selektorów rodziny \mathcal{A} .

Zadanie 158

Pokaż, że dowolne dwa skończone liniowe porządki o tej samej liczbie elementów są izomorficzne.

G9: Teoria mocy

Zadanie 159

Pokaż za pomocą indukcji matematycznej, że $n < 2^n$ dla każdej liczby naturalnej n . Udowodnij ten sam fakt bez korzystania z indukcji matematycznej.

Zadanie 160

Znajdź bijekcję pomiędzy następującymi parami zbiorów:

1. $(-\pi/2, \pi/2)$ i \mathbb{R} ,
2. $(0, 1)$ i $(2, 5)$,
3. $(0, \infty)$ i \mathbb{R} ,
4. $[0, 1]$ i $[0, 1)$.

Zadanie 161

Pokaż, że każdy niezdegenerowany odcinek prostej rzeczywistej jest mocy continuum. Pokaż, że każdy niezdegenerowany trójkąt na płaszczyźnie jest mocy continuum.

Zadanie 162

Niech $\text{Sym}(A)$ oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru A . Pokaż, że jeśli $|A| = |B|$ to $|\text{Sym}(A)| = |\text{Sym}(B)|$.

Zadanie 163

Pokaż, że zbiór punktów płaszczyzny o obu współrzędnych wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.

Zadanie 164

Pokaż, że dowolna rodzina parami rozłącznych odcinków liczb rzeczywistych jest przeliczalna.

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że liczby wymierne są gęste w zbiorze liczb rzeczywistych oraz, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny.

Zadanie 165

Pokaż, że dowolna rodzina parami rozłącznych niepustych kółek na płaszczyźnie jest przeliczalna.

Zadanie 166

Pokaż, że $n \cdot \aleph_0 = (\aleph_0)^n = \aleph_0$ dla każdej liczby naturalnej $n > 0$. Wyznacz liczbę $\aleph_0^{\aleph_0}$.

Zadanie 167

Jaka jest moc zbioru wszystkich ciągów liczb rzeczywistych zbieżnych do zera? Jaka jest moc zbioru wszystkich ciągów liczb całkowitych zbieżnych do zera?

Zadanie 168

Pokaż, że zbiór wszystkich funkcji ciągłych z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste jest mocy continuum.

Wskazówka: Pokaż, że jeśli $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są takimi funkcjami ciągłymi, że $f \upharpoonright \mathbb{Q} = g \upharpoonright \mathbb{Q}$ to $f = g$.

Zadanie 169

Pokaż, że zbiór wszystkich bijekcji ze zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb naturalnych jest mocy continuum.

Zadanie 170

Jaka może być moc zbioru $A \setminus B$ jeśli A i B są zbiorami mocy \aleph_0 ? Jaka może być moc zbioru $A \setminus B$ jeśli A i B są zbiorami mocy \mathfrak{c} ?

Zadanie 171

Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Pokaż, że $|\text{rng}(f)| = \aleph_0$ lub istnieje taka liczba naturalna n , że $|f^{-1}(n)| = \aleph_0$.

Zadanie 172

Jaka jest moc zbioru $\{X \subset \mathbb{N} : |X| < \aleph_0\}$? Jaka jest moc zbioru $\{X \subset \mathbb{R} : |X| < \aleph_0\}$? Jaka jest moc zbioru $\{X \subset \mathbb{R} : |X| \leq \aleph_0\}$?

* Zadanie 173

Oblicz $\kappa + \lambda$, $\kappa * \lambda$ oraz κ^λ dla dowolnych $\kappa, \lambda \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0, \mathfrak{c}, 2^{\mathfrak{c}}\}$.

Zadanie 174

Niech $\beth_0 = \aleph_0$ oraz $\beth_{n+1} = 2^{\beth_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

1. Pokaż, że $\beth_0 < \beth_1 < \beth_2 < \dots$
2. Niech $\beth_\omega = \sum_{n \geq 0} \beth_n$. Pokaż, że

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\beth_n < \beth_\omega).$$

3. Spróbuj zdefiniować samodzielnie liczby $\beth_{\omega+1}, \beth_{\omega+2}, \dots, \beth_{\omega+\omega}$

* Zadanie 175

Jaka jest moc zbioru $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$?

Wskazówka: Zapoznaj się z pojęciem "pierwotnych trójek pitagorejskich".

* Zadanie 176

Ile można narysować parami rozłącznych liter "L" na płaszczyźnie?. Ile można narysować parami rozłącznych liter "T" na płaszczyźnie?

* Zadanie 177

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Pokaż, że zbiór punktów nieciągłości funkcji f jest przeliczalny.

Wskazówka: Oznacz przez T zbiór punktów nieciągłości funkcji f i rozważ rodzinę odcinków

$$I_t = \left(\lim_{x \rightarrow t^-} f(x), \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) \right)$$

dla $t \in T$.

***** Zadanie 178 (Cantor)**

Liniowy porządek (L, \leq) nazywamy gęstym, jeśli

$$(\forall a, b \in L)(a < b \rightarrow (\exists c \in L)(a < c < b)).$$

Pokaż, że każdy przeliczalny liniowy gęsty porządek bez elementu największego i najmniejszego jest izomorficzny z porządkiem (\mathbb{Q}, \leq) .

**** Zadanie 179 (Sierpinski)**

Niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolną rodziną zbiorów mocy \aleph_0 . Pokaż, że istnieje rodzina nieskończonych, parami rozłącznych zbiorów $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taka, że $B_n \subseteq A_n$ dla wszystkich n .

Uwaga: Prawdziwa jest pewien wariant tego twierdzenia dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej.

**** Zadanie 180**

Niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolną rodziną nieskończonych podzbiorów zbiorów \mathbb{N} . Pokaż, że istnieje taki podzbiór S zbioru \mathbb{N} , że

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|A_n \cap S| = |A_n \setminus S| = \aleph_0).$$

*** Zadanie 181**

Niech $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ będzie dowolną rodziną funkcji ze zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Znajdź taką funkcję $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taką, że $(\forall n)(\forall^\infty k)(f_n(k) < g(k))$ (kwantyfikator \forall^∞ został zdefiniowany w zadaniu 57).

*** Zadanie 182**

Dla zbiorów $A, B \in P(\mathbb{N})$ określamy relację

$$A \subseteq^* B \leftrightarrow |A \setminus B| < \aleph_0.$$

Pokaż, że \subseteq^* jest preporządkiem. Załóżmy, że $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest taką rodziną nieskończonych podzbiorów \mathbb{N} , że $(\forall n \in \mathbb{N})(A_{n+1} \subseteq^* A_n)$. Pokaż, że istnieje taki nieskończony podzbiór B zbioru liczb naturalnych, że $(\forall n \in \mathbb{N})(B \subseteq^* A_n)$.

**** Zadanie 183**

Pokaż, że istnieje rodzina \mathcal{A} nieskończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych mocy continuum taka, że dla dowolnych dwóch różnych $A, B \in \mathcal{A}$ przekrój $A \cap B$ jest skończony.

Wskazówka: Skorzystaj z tego, że zbiór liczb wymiernych jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

*** Zadanie 184**

Pokaż, korzystając z Aksjomatu Wyboru, że jeśli A jest zbiorem nieskończonym (czyli, że $(\forall n \in \mathbb{N})(\neg|A| = n)$), to istnieje iniekcja $f : \mathbb{N} \rightarrow A$.

***** Zadanie 185 (Ramsey)**

Niech $R \subseteq \mathbb{N}^2$ będzie relacją symetryczną. Pokaż, że istnieje nieskończony podzbiór A zbioru \mathbb{N} taki, że $(\forall x, y \in A)(x \neq y \rightarrow (x, y) \in R)$ lub istnieje nieskończony podzbiór A zbioru \mathbb{N} taki, że $(\forall x, y \in A)(x \neq y \rightarrow (x, y) \notin R)$.

Zadanie 186

Pokaż, że z każdego nieskończonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać nieskończony podciąg monotoniczny.

G10: Elementy Teorii Kategorii

Zadanie 187

Które z następujących struktur są monoidami?

1. $([0, 1], 0, \vee)$, gdzie $x \vee y = \max\{x, y\}$
2. $([0, 1], 1, \wedge)$, gdzie $x \wedge y = \min\{x, y\}$
3. $((0, \infty), 1, \star)$, gdzie $x \star y = x^y$
4. $(X^X, \text{Id}_x, \circ)$ (X jest ustalonym zbiorem)
5. $(X^*, [], ++)$, (gdzie X jest ustalonym zbiorem)

Zadanie 188

Pokaż, że strzałka Id_A jest jednoznaczna, czyli, że jeśli Id1_A oraz Id2_A spełniają własności identyczności to $\text{Id1}_A = \text{Id2}_A$.

Zadanie 189

Pokaż, że złożenie monomorfizmów jest monomorfizmem.

Zadanie 190

Pokaż, że złożenie epimorfizmów jest epimorfizmem. Spróbuj podać proste uzasadnienie tego faktu oparte o poprzednie zadanie wykorzystujące pojęcie kategorii dualnej.

Zadanie 191

Pokaż, że jeśli $f : A \rightarrow B$ jest izomorfizmem, to odwrotność f^{-1} jest wyznaczona jednoznacznie.

Zadanie 192

Pokaż, że jeśli f^{-1} jest odwrotnością $f : A \rightarrow B$ i g^{-1} jest odwrotnością $g : B \rightarrow C$, to $f^{-1} \circ g^{-1}$ jest odwrotnością $g \circ f : A \rightarrow C$.

Zadanie 193

Podaj przykład kategorii ze strzałką która jest monomorfizmem oraz epimorfizmem, ale nie jest izomorfizmem.

Zadanie 194

Rozważamy kategorię zbudowaną z częściowego porządku (X, \leq) . Kiedy istnieją w niej elementy początkowe i końcowe?

Zadanie 195

Pokaż, że jeśli w diagramie

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

komutują wewnętrzne kwadraty, to również komutuje zewnętrzny kwadrat.

Zadanie 196

Zinterpretuj w języku informatyki komutowanie następującego diagramu

$$\begin{array}{ccc} \text{Int} & \xrightarrow{\text{succ}_{\text{Int}}} & \text{Int} \\ \text{toReal} \downarrow & & \downarrow \text{toReal} \\ \text{Real} & \xrightarrow{\text{succ}_{\text{Real}}} & \text{Real} \end{array}$$

Zadanie 197

Pokaż, że obiekty końcowe (terminalne) w ustalonej kategorii są wyrażone jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Pokaż podobną własność obiektów początkowych.

Zadanie 198

Wyznacz obiekty końcowe i początkowe w następujących kategoriach:

1. w kategorii grup **Grp**
2. w kategorii ciał
3. w kategorii częściowych porządków **Pos**
4. w kategorii monoidów **Mon**
5. **Set** × **Set**
6. **Set**[→]

Zadanie 199

Pokaż, że produkt $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu w kategorii **Set**.

Wskazówka: Skorzystaj z jednoznaczności mediatora w definicji produktu.

Zadanie 200

Pokaż, że jeśli \mathcal{C} jest kategorią, to \mathcal{C}^{op} też jest kategorią.

Wskazówka: Jak w kategorii \mathcal{C}^{op} definiuje się złożenie morfizmów?.

Zadanie 201

Niech (G, \cdot) będzie grupą. Na zbiorze G określamy działanie $a \star b = b \cdot a$

1. Pokaż, że (G, \star) jest grupą.
2. Znajdź izomorfizm między grupami (G, \cdot) oraz (G, \star) .
3. Jaki ma związek to zadanie z konstrukcją \mathcal{C}^{op} ?

Zadanie 202

Zapisz w języku diagramów komutujących (przemiennych) łączność operacji złożenia funkcji.

Zadanie 203

Niech $(G, \cdot), (H, \star)$ będą grupami oraz niech $f : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem. Wiadomo, że grupa ilorazowa $G/\ker(f)$ jest izomorficzna z podgrupą $\text{img}(f)$ grupy H . Zapisz to w języku przemiennych diagramów.

Zadanie 204

Niech \mathcal{C} będzie kategorią z produktem. Dla $f : X \rightarrow A$ oraz $g : Y \rightarrow B$ niech $\langle f, g \rangle$ będzie strzałką mediacyjną dla produktu $A \times B$. Pokaż, że $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$.

** Zadanie 205

Rozważamy kategorię **Mon** (monoidów). Pokaż, że funkcja $f : (\mathbb{N}, 0, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +, +)$ określona wzorem $f(x) = x$ (czyli identyczność na \mathbb{N} traktowana jako morfizm z $(\mathbb{N}, 0, +)$ do $(\mathbb{Z}, 0, +)$) jest epimorfizmem.

Zadanie 206

Ustalmy zbiór Ω . Rozważmy kategorię $\mathcal{P}(\Omega)$ której obiektami są wszystkie podzbiory zbioru Ω , zaś morfizmy oznaczają zawieranie zbiorów. Niech $A, B \subseteq \Omega$.

1. Wyznacz $A \times B$ w tej kategorii
2. Wyznacz $A + B$ w tej kategorii.

* Zadanie 207

Rozważmy takie przyporządkowanie $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$

$$F(X) = \begin{cases} \emptyset & : |X| < \aleph_0 \\ \mathbb{N} & : |X| \geq \aleph_0 \end{cases}$$

Pokaż, że F nie można rozszerzyć do funktora.

* Zadanie 208

Sprawdź, że następujące przyporządkowania są endofunktorami kategorii **Set** oraz zaproponuj dla nich odwzorowania $\eta_X : X \rightarrow F(X)$ i $\mu_X : F(F(X)) \rightarrow F(X)$:

1. $F(X) = X \times X$; $F(f : X \rightarrow Y)(x, y) = (f(x), f(y))$
2. (Reader) $R_A(X) = X^A$; $R(f : X \rightarrow Y)(\phi) = f \circ \phi$
3. (Writer) $W_{\mathcal{M}}(X) = M \times X$; $W_{\mathcal{M}}(f : X \rightarrow Y) = id_M \times f$, gdzie $\mathcal{M} = (M, e, \star)$ jest ustalonym monoidem
4. (State) $S_A(X) = (A \times X)^A$; $S_A(f : X \rightarrow Y)(\phi) = (\lambda a)(\text{let } (b, y) = \phi(a) \text{ in } (b, f(y)))$
5. (Maybe) $M(X) = X \cup \{\uparrow_X\}$; $F(f : X \rightarrow Y) = f \cup \{(\uparrow_X, \uparrow_Y)\}$
6. (Niedeterminizm) $N(X) = \{Y \subseteq X : |Y| < \aleph_0\}$; $N(f : X \rightarrow Y)(A) = f[A]$

Odwzorowania η oraz μ muszą posiadać te same własności co ich odpowiedniki dla funktora **List**, czyli $\mu_X \circ \eta_{F(X)} = id_{F(X)}$, $\mu_X \circ F(\eta_X) = id_{F(X)}$ oraz $\mu_X \circ \mu_{F(X)} = \mu \circ F(\mu)$.

Zadanie 209

Niech $mmap\ f = map\ (map\ f)$ oraz $mmmap\ f = map\ (map\ (map\ f))$.

1. Zbadaj typy tych odwzorowań.
2. Przetestuj ich działanie
3. Pokaż, że $mmap = map \cdot map$ oraz $mmmap = map \cdot map \cdot map$

G11: Elementy Teorii Modeli

Zadanie 210

Wyznacz wartość termu $\tau = 1 + (1 + (1 + (1 + 1)))$ w pierścieniach \mathbb{Z}_n dla dowolnego $n \geq 1$.

Zadanie 211

Czy $(\mathbb{N}, \leq) \equiv (\mathbb{Z}, \leq)$?

Zadanie 212

Niech $Th(\mathfrak{a}) = \{\phi \in Sent : \mathfrak{a} \models \phi\}$. Pokaż, że $Th(\mathfrak{a})$ jest teorią niesprzeczną i zupełną.

Zadanie 213

Znajdź zdania ϕ_n i ψ_n takie, że

1. ϕ_n jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy model ma moc większą lub równą n ,
2. ψ_n jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy model ma moc równą n .

Zadanie 214

Pokaż, że jeśli dwie struktury są izomorficzne, to są elementarnie równoważne.

Zadanie 215

Pokaż, że

1. $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}$,
2. $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}$,
3. $(\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}) \wedge (\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{c}) \rightarrow (\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{c})$

Zadanie 216

Niech PO oznacza teorię częściowych porządków z predykatem binarnym R .

1. Pokaż, że $PO \models (\forall x)((\forall y)(R(y, x) \rightarrow (\forall y)(R(x, y) \rightarrow y = x))$
2. Niech $\phi = (\forall x, y)(R(x, y) \vee R(y, x))$. Pokaż, że zdanie ϕ jest niezależne od teorii PO .
3. Niech $LO = PO \cup \{(\forall x, y)(R(x, y) \vee R(y, x))\}$. Pokaż, że teoria LO jest kategorięczna w każdej mocy skończonej. Czy LO jest kategorięczna w mocy \aleph_0 ?
4. Niech

$$DLO = LO \cup \{(\forall x, y)((R(x, y) \wedge x \neq y) \rightarrow (\exists z)(R(x, z) \wedge R(z, y) \wedge x \neq z \wedge z \neq y))\}$$

Pokaż, że jeśli $(A, \mathbf{R}) \models DLO$ oraz $|A| > 1$ to $|A| \geq \aleph_0$.

5. Czy DLO jest kategorięczna w mocy \aleph_0 ?
6. Niech

$$DLO^* = DLO \cup \{\neg(\exists x)(\forall y)R(y, x), \neg(\exists x)(\forall y)(R(x, y))\}.$$

Pokaż, że DLO^* jest kategorięczna w mocy \aleph_0

7. Ile nieizomorficznych modeli ma teoria DLO w mocy \aleph_0 ?

Zadanie 217

Pokaż, że jeśli \mathfrak{a} jest strukturą skończoną o skończonej sygnaturze, to $Th(\mathfrak{a})$ jest zbiorem rozstrzygalnym.

Powodzenia,
Jacek Cichoń