Egzamin z LiSF
termin drugi
13.02.2020

Zadanie 1 *Niech $n \geqslant 2$. Ile jest waluacji $\pi : \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, takich, że $eval(\psi, \pi) = \mathbf{1}$, gdzie*

$$\psi = (p_1 \to p_n) \land (p_2 \to p_n) \land \ldots \land (p_{n-1} \to p_n) \ ?$$

Rozwiązanie Zauważmy, że jeśli $\pi(p_n) = \mathbf{1}$, to $eval(\psi, \pi) = \mathbf{1}$. Takich waluacji mamy 2^{n-1}. Jeśli zaś $\pi(p_n) = \mathbf{0}$ i $eval(\psi, \pi) = \mathbf{1}$, to $\pi(p_1) = \pi(p_2) = \ldots = \pi(p_{n-1}) = 0$. Istnieje więc tylko jedna taka waluacja. Mamy więc łącznie $1 + 2^{n-1}$ takich waluacji.

Zadanie 2 *Wyznacz moc następującego zbioru*

$$\{(A, B) \in P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}) : |A \cup B| \leqslant \aleph_0\} \ .$$

Rozwiązanie Niech $Z = \{(A, B) \in P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}) : |A \cup B| \leqslant \aleph_0\}$. Zauważmy, że $|A \cup B| \leqslant \aleph_0 \longleftrightarrow ((|A| \leqslant \aleph_0) \land (|B| \leqslant \aleph_0))$, więc $Z = P_\omega(\mathbb{R}) \times P_\omega(\mathbb{R})$, gdzie

$$P_\omega(\mathbb{R}) = \{A \in P(\mathbb{R}) : |A| \leqslant \aleph_0\} \ .$$

Każdy podzbiór jednoelementowy $\mathbb{R}$ jest elementem $P_\omega(\mathbb{R})$. Zatem $|P_\omega(\mathbb{R})| \geqslant \mathfrak{c}$. Każdy niepusty przeliczalny podzbiór $\mathbb{R}$ jest obrazem pewnej funkcji z $\mathbb{N}$, zatem

$$|P_\omega(\mathbb{R})| \leqslant 1 + |\mathbb{R}^\mathbb{N}| = 1 + \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \ .$$

Zatem $|P_\omega(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$. Mamy więc $|Z| = |P_\omega(\mathbb{R}) \times P_\omega(\mathbb{R})| = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Zadanie 3 *Na zbiorze*

$$A = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1] : |x| \leqslant y\}$$

określamy częściowy porządek wzorem

$$((x, y) \preceq (x', y')) \longleftrightarrow ((x \leqslant x') \land (y \leqslant y'))$$

Wyznacz moc zbioru wszystkich elementów maksymalnych oraz moc zbioru wszystkich elementów minimalnych w częściowym porządku $(A, \preceq)$.

Rozwiązanie Dla każdego $(x, y) \in A$ mamy $(x, y) \preceq (1, 1)$.Ponadto $(1, 1) \in A$. Zatem $(1, 1)$ jest największym elementem A. Jest to więc jedyny element maksymalny. Zatem moc zbioru elementow maksymalnych wynosi 1.

Zauważmy teraz, że dla dowolnego $(x, y) \in A$ mamy $(-|x|, |x|) \preceq (x, y)$. Każdy punkt minimalny jest więc postaci $(x, |x|)$ dla pewnego $x \in [-1, 0]$. Jeśli

$x \in [-1,0]$ i $(a,b) \preceq (x,|x|)$, to $(a \leqslant x) \wedge (b \leqslant |x|)$. Gdyby $a < x$, to $b \leqslant |x| < |a|$, co jest jest sprzeczne z tym, że $(a,b) \in A$. Podobnie, gdyby $b < |x|$ to mielibyśmy $b < |x| \leqslant |a|$. Zatem $(a,b) = (x,|x|)$. Tak więc zbiór $M = \{(x,|x|) : x \in [-1,0]\}$ jest zbiorem wszystkich punktów minimalnych. Tak więc $|M| = \mathfrak{c}$.

Zadanie 4 *Oblicz* $|\sin^{-1}(\mathbb{Q})|$.

Rozwiązanie Niech $A_q = \sin^{-1}(\{q\})$. Wtedy $\sin^{-1}(\mathbb{Q}) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$. Wystarczy więc pokazać, że dla dowolnego $q \in \mathbb{Q}$ zbiór A_q jest przeliczalny (bo suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna).

Jeśli $q \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ to $A_q = \emptyset$. Załóżmy więc, że $q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$. Obrazem funkcji $\sin \restriction [-\pi/2, \pi/2]$ jest odcinek $[-1,1]$. Dla $q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ niech $x_q \in [-\pi/2, \pi/2]$ będzie takie, że $\sin(x_q) = q$. Wtedy

$$A_q = \{x_q + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(\pi - x_p) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} ,$$

zatem A_q jest przeliczalny.

Zadanie 5 *Dla* $q \geqslant 2$ *i dla* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *określamy* $\mu_q(n) = \max\{k \in \mathbb{N} : q^k | n\}$. *Na zbiorze* $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ *określamy relację równoważności* $\sim$ *wzorem*

$$(n \sim m) \equiv (\mu_2(n) = \mu_2(m) \wedge (\mu_3(n) = \mu_3(m))) .$$

Niech $I = (\mathbb{N} \setminus \{0\}) / \sim$ *będzie zbiorem wszystkich klas abstrakcji relacji* $\sim$.

1. *Wyznacz* $|I|$.
2. *Podaj przykład selektora rodziny* I.
3. *Wyznacz moc zbioru wszystkich selektorów rodziny* I

Rozwiązanie Niech $\psi(n) = (v_2(n), v_3(n)$. Wtedy $\psi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oraz

$$(n \sim m) \equiv (\psi(n) = \psi(m)) .$$

Niech $S = \{2^n \cdot 3^m : (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. Jest to selektor I, bo ψ jest różnowartościowa na S i $\psi(S) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Mamy też $|I| = |S| = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$.

Każdy selektor I jest podzbiorem $\mathbb{N}$, więc moc zbioru wszystkich selektorów I jest ograniczona z góry przez $|P(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$. Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$ zbiór $S_f = \{2^n \cdot 3^m \cdot 5^{f(n,m)} : (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ jest również selektorem I, zatem moc zbioru selektorów jest z dołu ograniczna przez $|2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Zatem moc zbioru wszystkich selektorów rodziny I wynosi $\mathfrak{c}$.