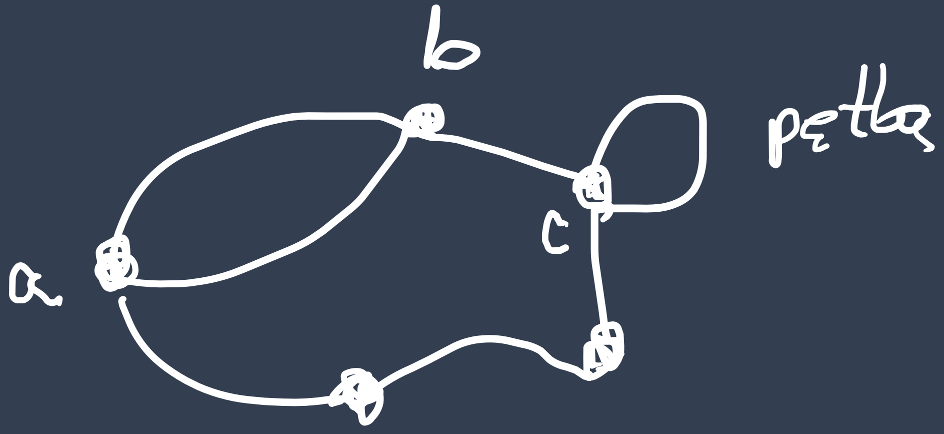
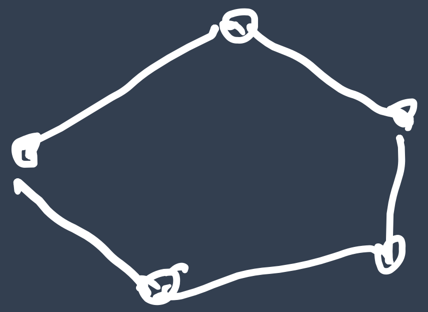
DEFINICJA GRAFU



graf ogólny

multigraf

(graf)



graf

(graf prosty)

<u>Def.</u> <u>Grafem prostym</u> nazywamy $G=(V,E)$, gdzie V jest zbiorem

<u>oraz</u> $E \subseteq [V]^2$ $\left(=\{A \subseteq V : |A|=2\}\right)$

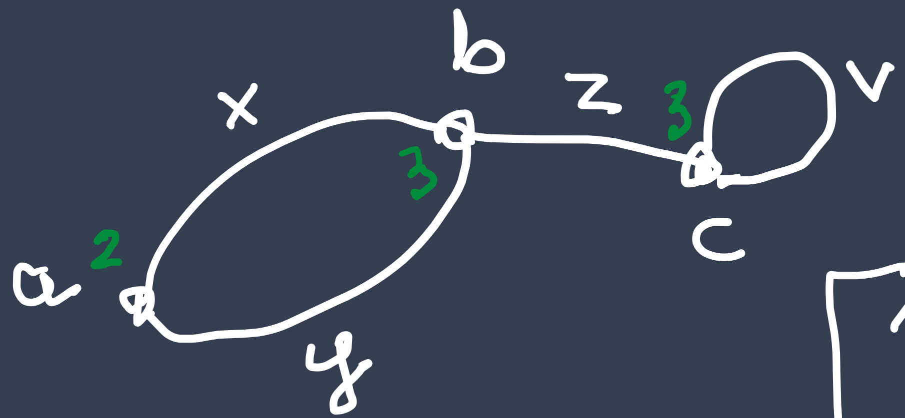
V = zbiór wierz.

E = zbiór krawędzi

Def. Grafem ogólnym nazywamy trójkę

$$\mathcal{G} = (V, E, \gamma), \text{ gdzie}$$

$$\gamma : E \longrightarrow [V]^{\leq 2} \setminus \{\emptyset\}$$



$V = \{a, b, c\}$

$E = \{x, y, z, v\}$

$$\begin{cases} \gamma(x) = \{a, b\} \\ \gamma(y) = \{a, b\} \\ \gamma(z) = \{b, c\} \end{cases} \qquad \gamma(v) = \{c\}$$

$\gamma \leftarrow$ funkcja incydencji

Q: Ile jest grafów (prostych) o zbiorze wierzch. $\{1, \ldots, n\}$?

$$G = (\{1, \ldots, n\}, E)$$

$$E \subseteq [\{1, \ldots, n\}]^2$$

$$\left|[\{1, \ldots, n\}]^2\right| = \binom{n}{2}$$

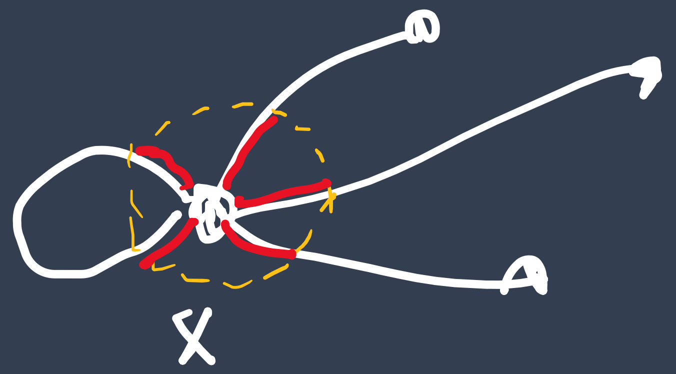
Odp: $2^{\binom{n}{2}}$

P $n = 20$; $\binom{n}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

$$2^{190} = (2^{10})^{19} \simeq (10^3)^{19} \simeq 10^{57}$$

Def. Niech $G = (V, E, \gamma)$ będzie grafem ogólnym, $x \in V$. Rzędem x nazywamy liczbę

$$\deg(x) = \left|\{e \in E : x \in \gamma(e)\}\right| + \left|\{e \in E : \gamma(e) = \{x\}\}\right|$$



$E_1 = \{e \in E : |\gamma(e)| = 1\}$

$E_2 = \{e \in E : |\gamma(e)| = 2\}$

$$\deg(x) = \left|\{e \in E_2 : x \in \gamma(e)\}\right| + 2 \cdot \left|\{e \in E_1 : \gamma(e) = \{x\}\}\right|$$

Tw (Euler) Dla dowolnego grafu (V, E, γ)

mamy

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}$$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E| .$$

$$[\![\varphi]\!] = \begin{cases} 1 : \varphi \\ 0 : \neg\varphi \end{cases}$$

D-d.

$$\sum_v \deg(v) = \sum_v \left(\sum_{e \in E_2} [\![v \in \gamma(e)]\!] + 2 \cdot \sum_{e \in E_1} [\![\gamma(e) = \{v\}]\!] \right)$$

$$= \sum_{e \in E_2} \underbrace{\sum_v [\![v \in \gamma(e)]\!]}_{2} + 2 \cdot \sum_{e \in E_1} \underbrace{\sum_v [\![\gamma(e) = \{v\}]\!]}_{1} = 2 \cdot |E_2| + 2 \cdot |E_1|$$

$$= 2 \cdot (|E_1| + |E_2|)$$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

- weźmy to rów. modulo 2

$$\sum_{v} \deg(v) \bmod 2 = 0$$

więc

$$2 \mid |\{v \in V : \neg(2 \mid \deg(v))\}|$$

czyli liczba wierzchołków o nędach nieparzystych jest parzysta

Uwaga : (V, E, γ) $\quad |\gamma(e)| = 2$

o definicjach $\quad \wr\wr\wr \quad \gamma$ - 1-1

$$\left(V, \{\gamma(e) : e \in E\}\right)$$

czyli : pojęcie grafu prostego jest szczególnym przypadkiem grafu ogólnego