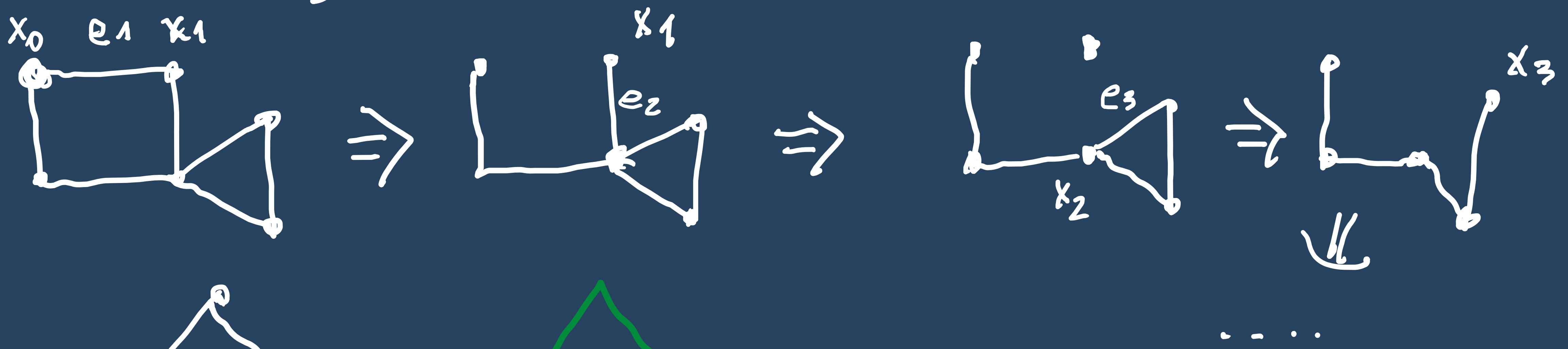
ALG. FLEURY'ego.

"unikaj mostów jeśli to możliwe"



Poprawność algorytmu.

(V, E) – spójny, parzysty

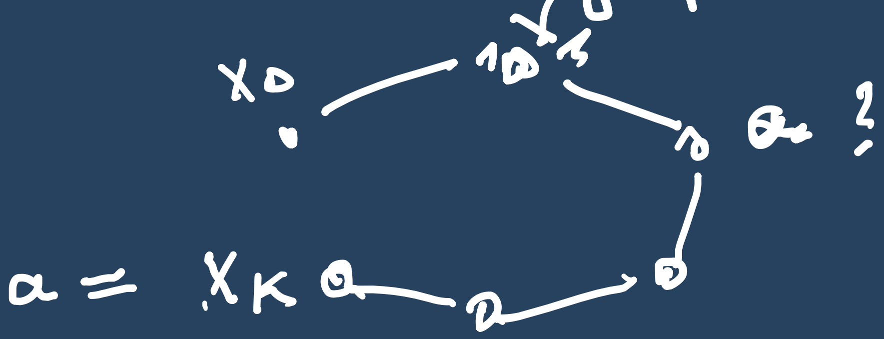
F = zbiór krawędzi po zakończeniu działania algorytmu.

Zakł. że $F \neq \emptyset$.

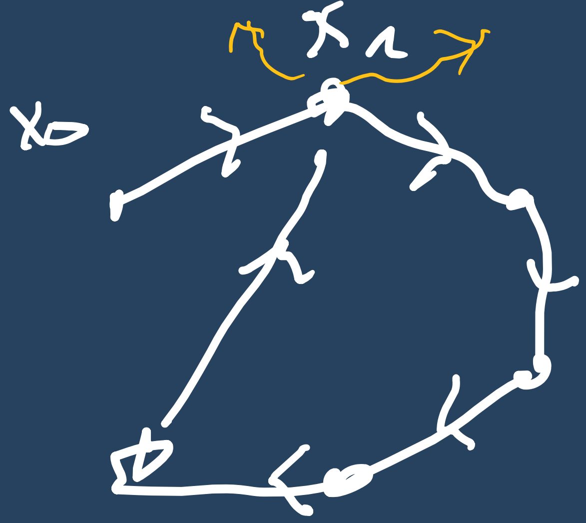
$x_0 e_1 x_1 e_2 x_2 \ldots\ldots e_k x_k$ ← ścieżka Eulera zbud. przez alg.

$e_i \neq e_j$ dla $i \neq j$.

- co możemy powiedzieć o x_k

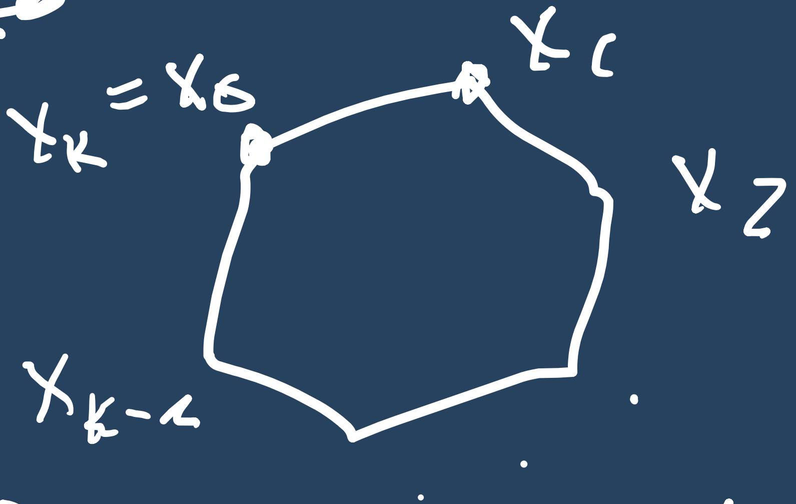


$x_K \in \{x_0, \ldots, x_{K-1}\}$



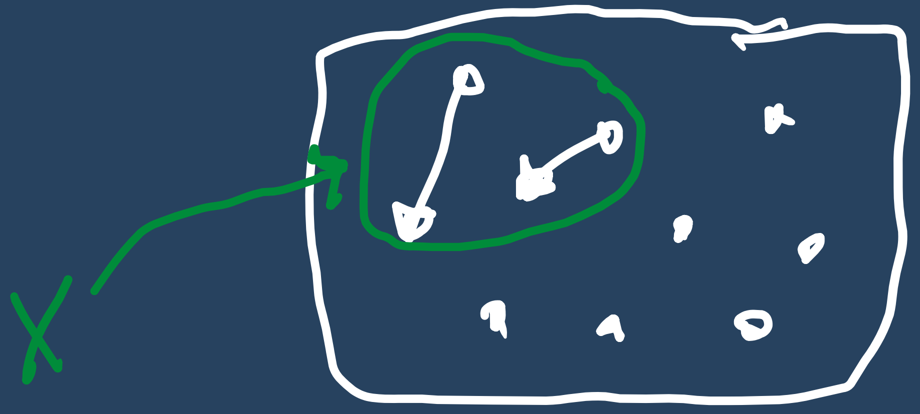
$x_k \in \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$

$x_k = x_0$



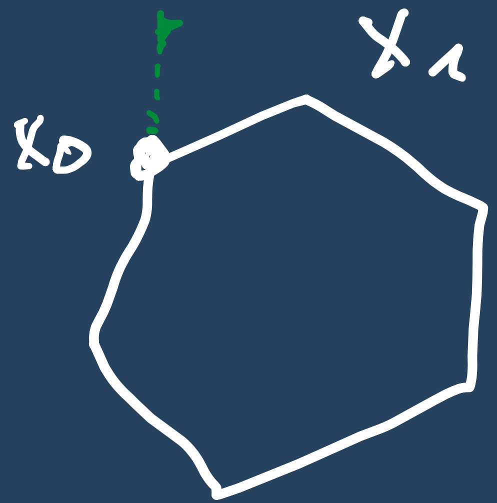
- (V, F) jest parzysty.

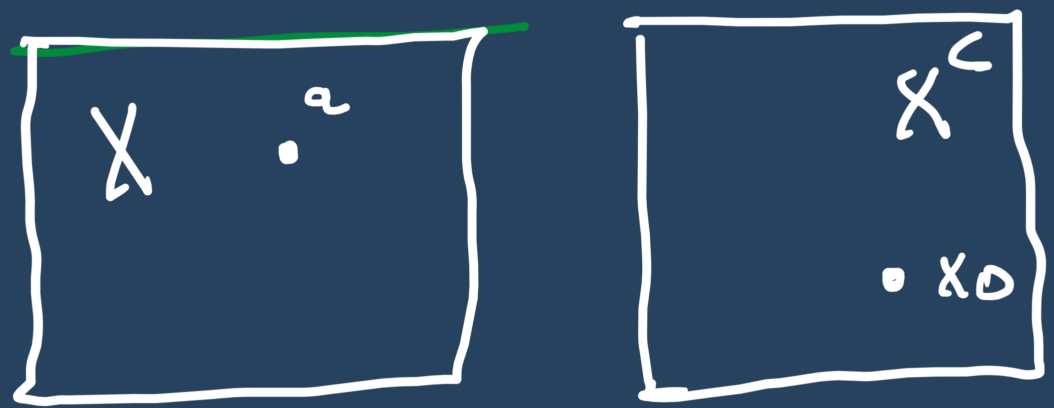
Case 2a. i.e. $F \neq \emptyset$



Def: $X = \{x \in V : \deg_F(x) > 0\}$

- $X \neq \emptyset$
- $x_0 \notin X$



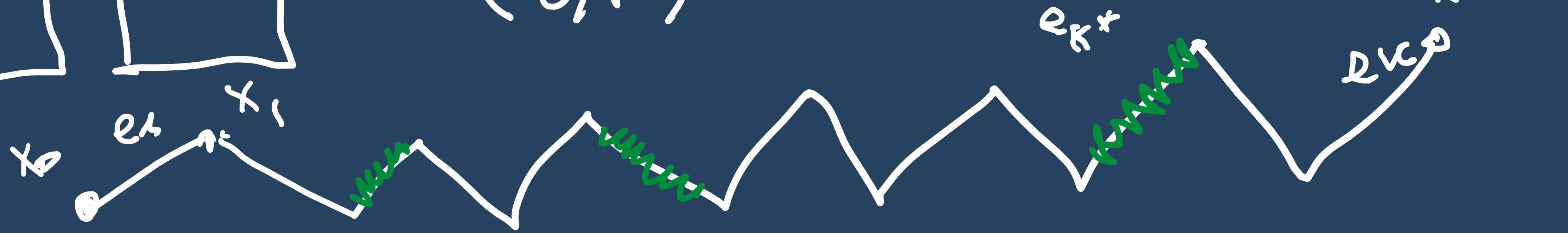


- $\partial_E(X) \neq \emptyset$
- $\partial_F(X) = \emptyset$

START

(V, E)

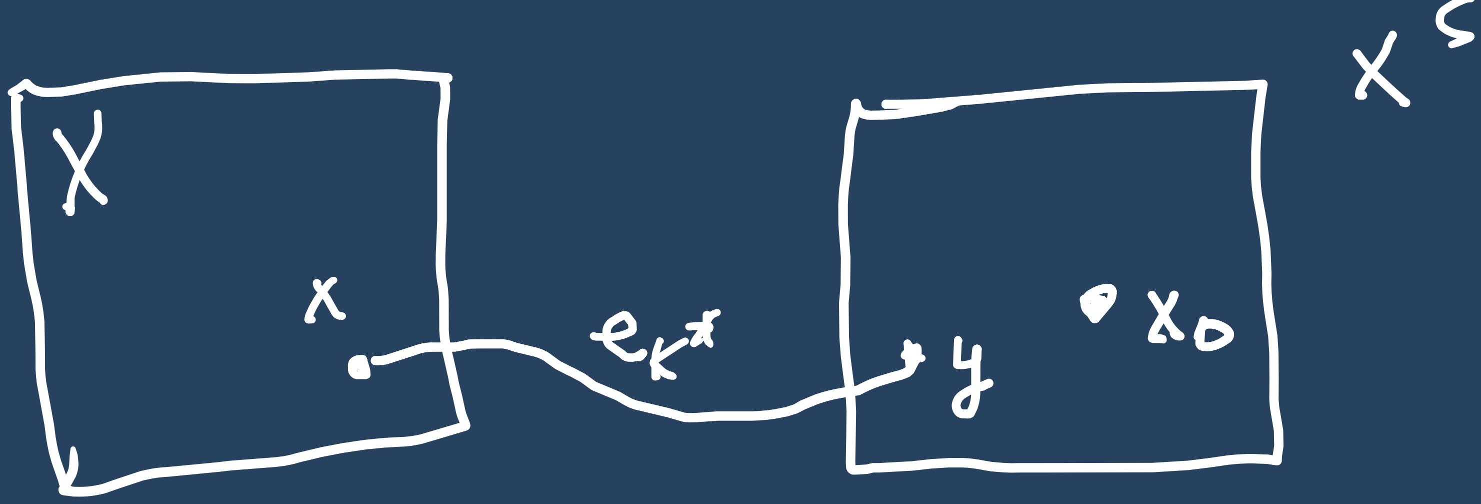
(V, F)



$\{e_1, \dots, e_k\}$ – usunięte krawędzie

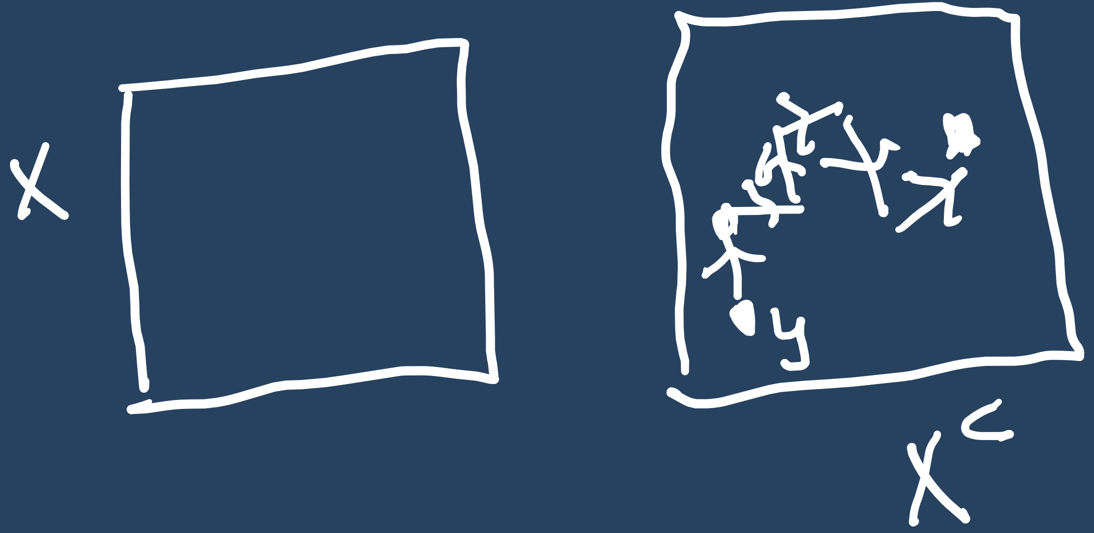
$k^* = \max\{\ell : e_\ell \in \delta_E(X)\}$

e_{k^*} = ostatnia usunięta krawędź.



$F^* =$ zbiór krawędzi po usunięciu e_{k^*}

• e_{k^*} było mostem $(V, F^* \cup \{e_{k^*}\})$

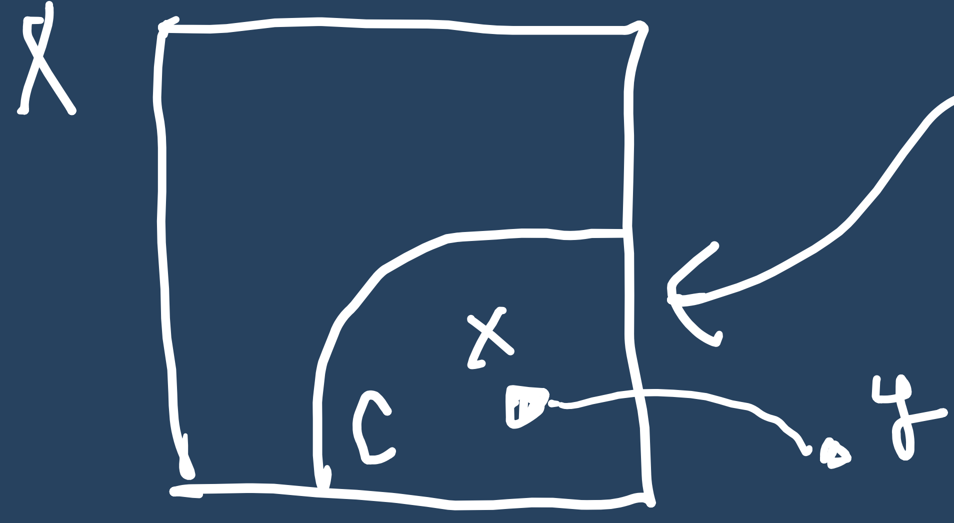


(V, E^k)

• $(X, F^* \cap [X]^2)$

$\parallel$

(X, F)



C = składowa spójna x w (V, F) (parzysty)

= skł. spójna x w (V, F^*)

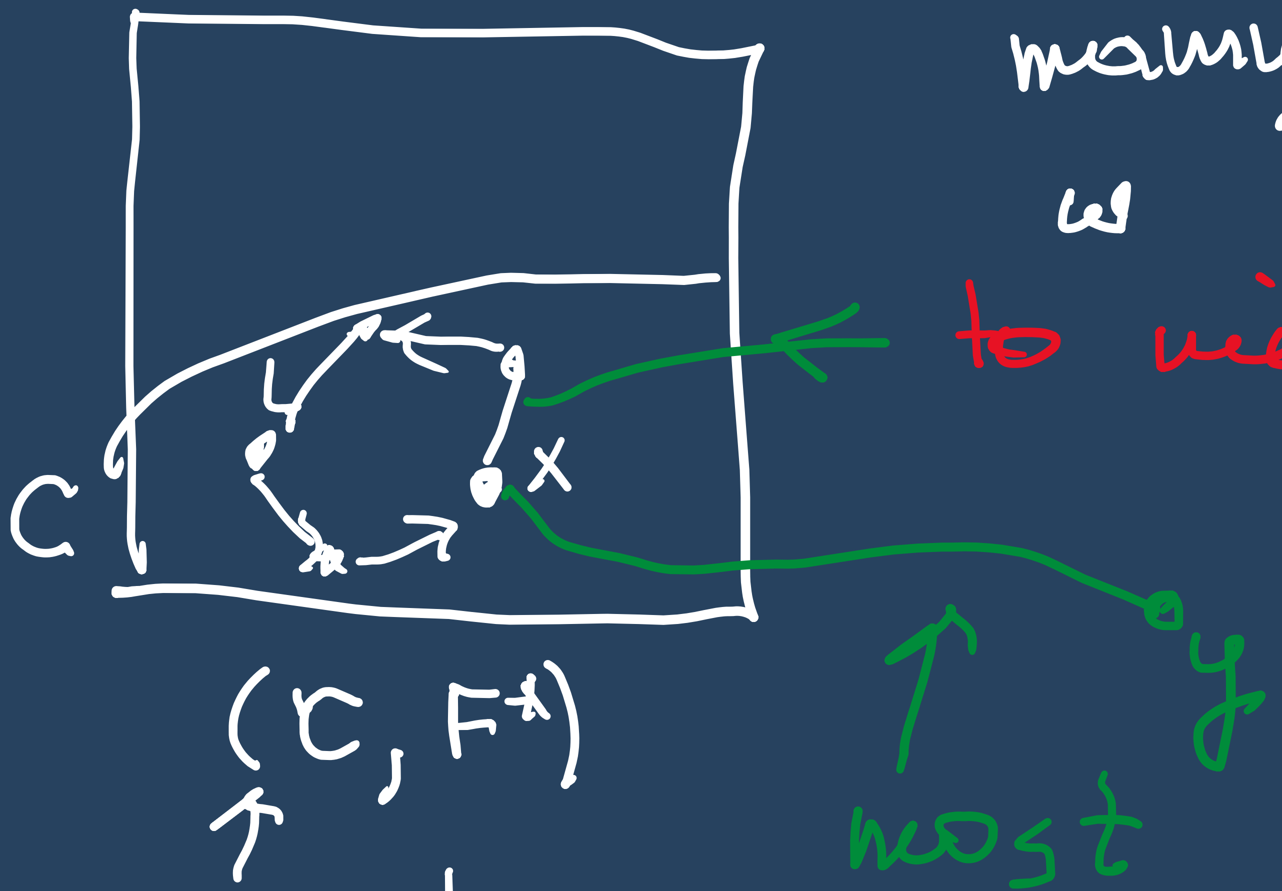
$\deg_F(x) \geq 1$ bo $x \in X$

$\deg_F(x) \geq 2$

$\deg_{F^*}(x) \geq 2$

mamy cykl Eulera

w (C, F^*)



to nie jest mostem

sprzeczność

(C, F^*)

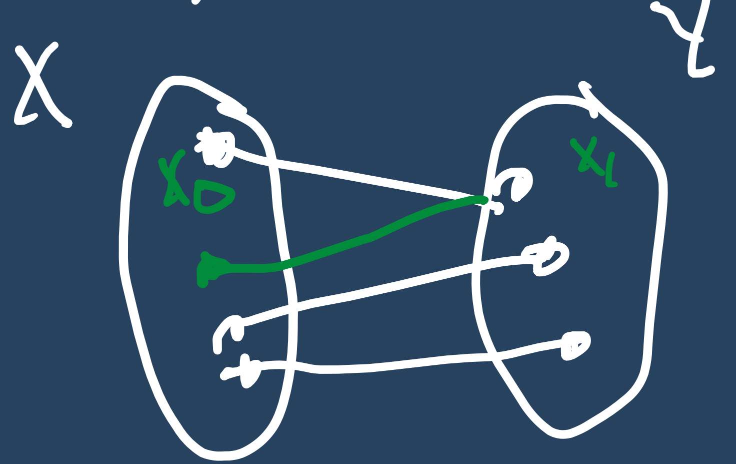
parzysty

$\blacksquare$

Def. (V,E) - dwudzielny

$$(\exists X,Y)\left(V \overset{\text{def}}{=} X \dot{\cup} Y \wedge \left(E \subseteq \{\{x,y\} : x\in X \wedge y\in Y\}\right)\right)$$

$K_{n,m}$ = pełny graf dwudzielny



$x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4 = x_0$

X

<u>Tw.</u> Zadanie: Graf jest <u>dwudzielny</u> IFF wszystkie cykle w nim mają długość parzystą.

MIARY SPÓJNOŚCI GRAFÓW.

$G = (V, E)$ – graf spójny

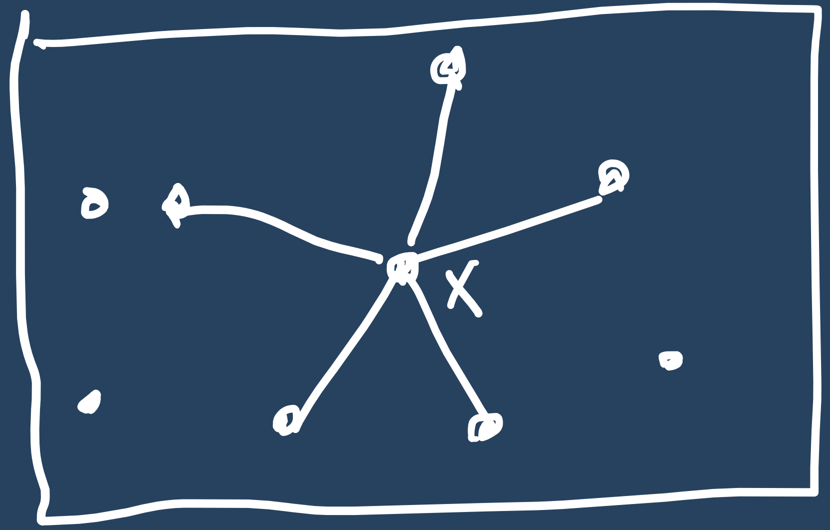
$$\lambda(G) = \min\{|K| : K \subseteq E \wedge (V, E \setminus K) \text{ nie jest spójny}\}$$

$|V| \geq 2$

$$\delta(G) = \min\{\deg(x) : x \in V\}.$$

$K = \{e \in E : x \in \gamma(e)\}$

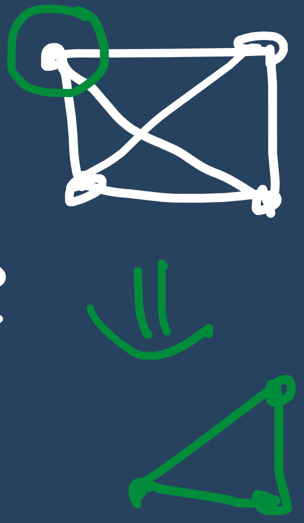
$(V, E \setminus K)$ – nie jest spójny



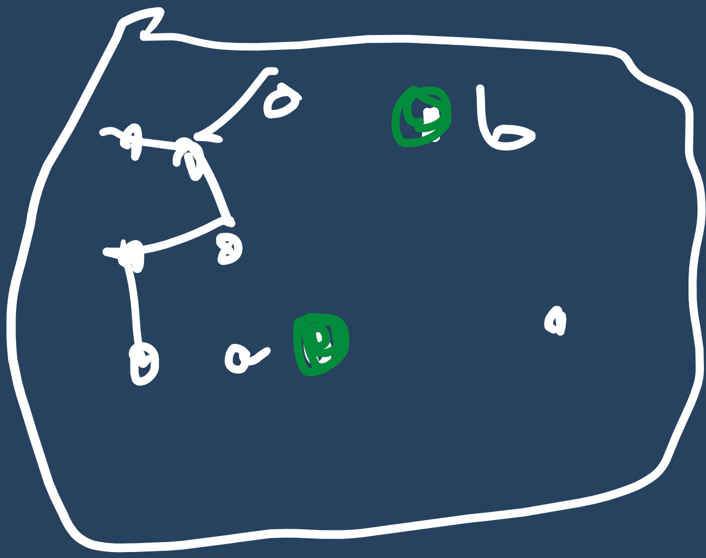
WNIOSEK: $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

Problem: $G = K_n$

tego nie można rozspójnić przez usuwanie wierzchołków.



ALE: jeśli są $a, b \in V$ t.że $ab \notin E$



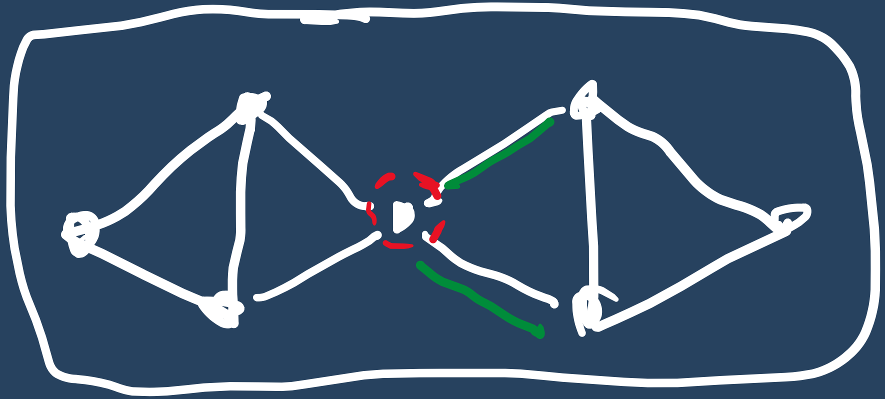
$$X = V \setminus \{a, b\}$$

$$\left(V \setminus X, E \cap [V - X]^2\right) \simeq E_2$$

$$\varkappa(G) = \begin{cases} n-1 & : \; G \underset{izo}{\cong} K_n \\ \min\{X \subseteq V : \; G[V \setminus X] \text{ nie jest spójny}\} & : \; \neg\left(G \underset{izo}{\cong} K_n\right). \end{cases}$$

TW. $\boxed{\varkappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)}$

P

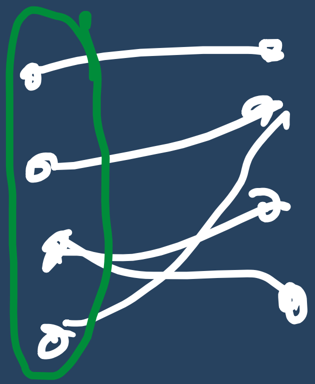


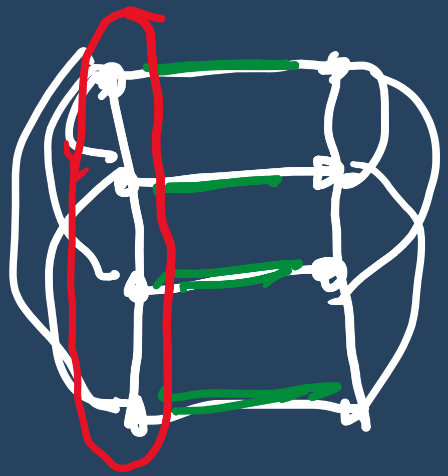
$\mathcal{G}$

$$\kappa(\mathcal{G}) = 1$$

$$\lambda(\mathcal{G}) = 2$$

$$\kappa(G) \leq \lambda(G)$$





<u>D-d</u>. Weźmy zbiór $K \subseteq E$ t. że $|K| = \lambda(G)$ i $(V, E \setminus K)$ nie jest spójny

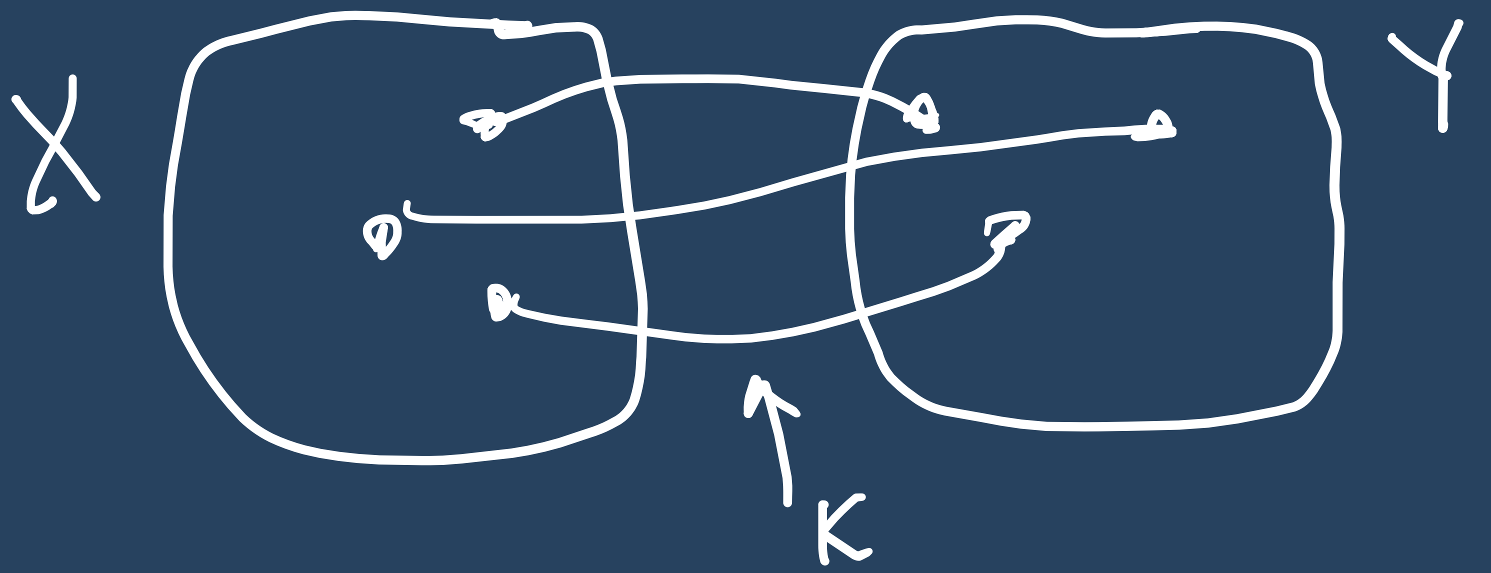
$e \in K$; $(V, E \setminus (K \setminus \{e\}))$ — spójny

$K^* = K \setminus \{e\}$ $\quad (V, K^*)$ — spójny

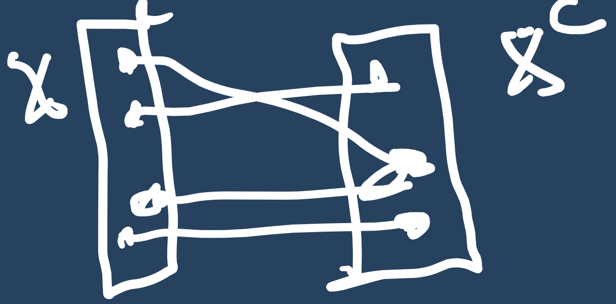
$(V, K^* \setminus \{e\})$ — nie jest spójny

$\underline{e}$ jest mostem

$G^* = (V, E \setminus K)$ ma dwie składowe

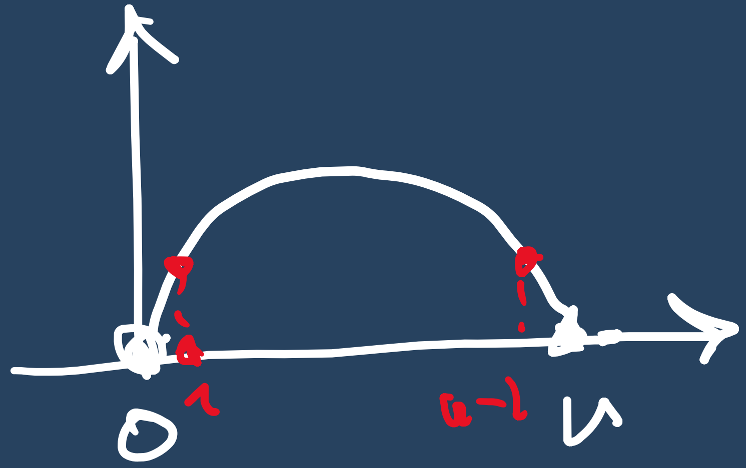


① G^* pełen dwudzielny



$$|K| = \underbrace{|X|}_{x} \cdot (\underbrace{|V|}_{n} - \underbrace{|X|}_{x})$$

$$= x(n-x) \quad 1 \leq x \leq n-1$$



$$y = x(n-x)$$

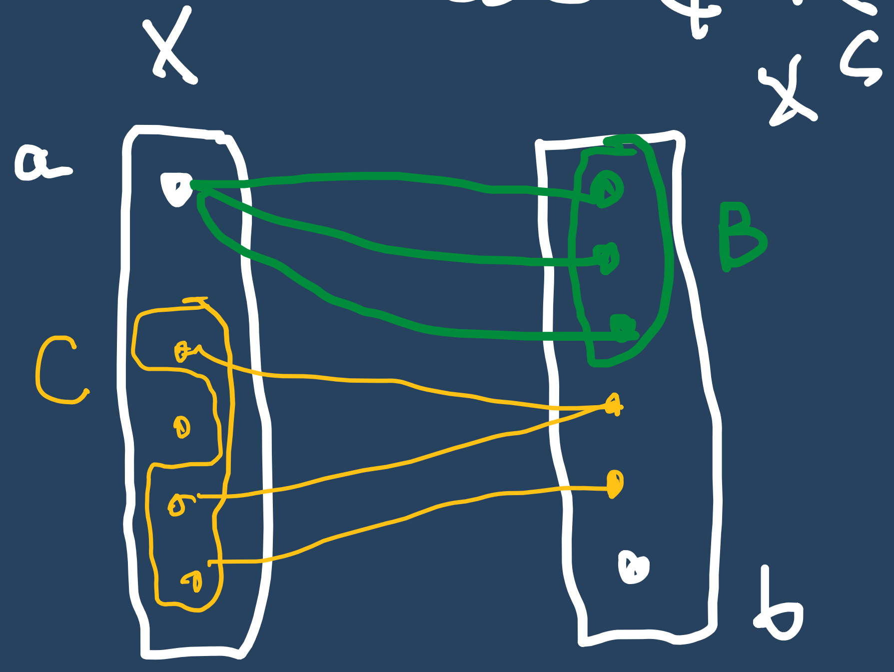
dla $x \in [1, n-1]$

$$x(n-x) \geq 1(n-1)$$

$$= n-1 \geq \kappa(G)$$

$$\lambda(G) \geq \kappa(G)$$

(2) jest $a \in X$ i $b \in X^c$ t. że $ab \notin K$



$B = \{y \in X^c : ay \in K\}$

$C = \{x \in X : x \neq a \wedge (\exists y \in X^c)(xy \in K)\}$

$|B \cup C| \leq |K|$

(Z) CLAIM: $G[V \setminus (B \cup C)]$ – nie jest spójny

nie ma ścieżki od a do b.

Grafy hamiltonowskie.

$G=(V,E)$ jest hamiltonowski

jeśli istnieje ~~drogę~~ cykl

$x_0 x_1 x_2 \dots x_k = x_0$

t. że $\{x_0, \dots, x_{k-1}\} = V$.

$[x_i \neq x_j \ : \ i \neq j]$

Tw (Ore) Zał. że (V, E) jest spójny

oraz, że

$$(\forall x, y \in V)\left(xy \notin E \longrightarrow \deg(x) + \deg(y) \geq n\right)$$

wtedy (V, E) jest hamiltonowski.