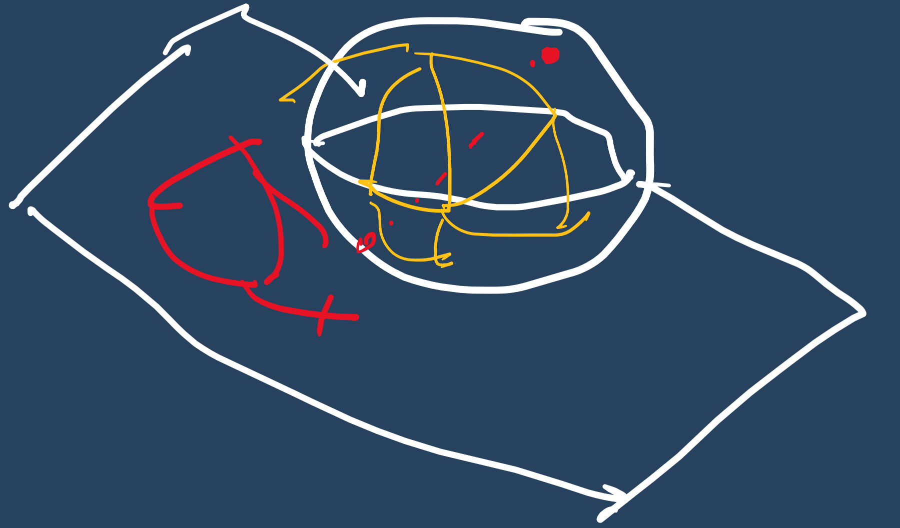
Planarność grafu ≡ realizacja grafu na sferze bez przecięć



Tw. Jeśli (V, E) jest grafem planarnym, spójnym

to

$$f - e + v = 2$$

gdzie f = liczba ścian (włącznie ze ścianą nieogr.)

[EULER] e = liczba krawędzi

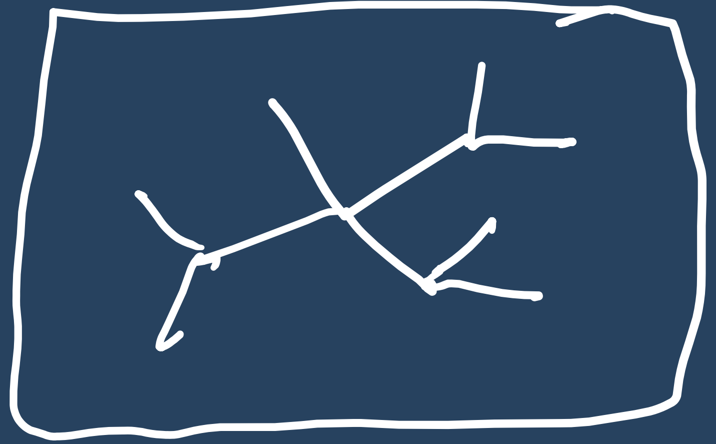
v = liczba wierzchołków.

D-d. indukcja po $|E| = e$.

minimalna ~~war~~ wartość e : $v-1$

(spójny)

- Zał. że $e = v - 1$. wtedy graf jest drzewem



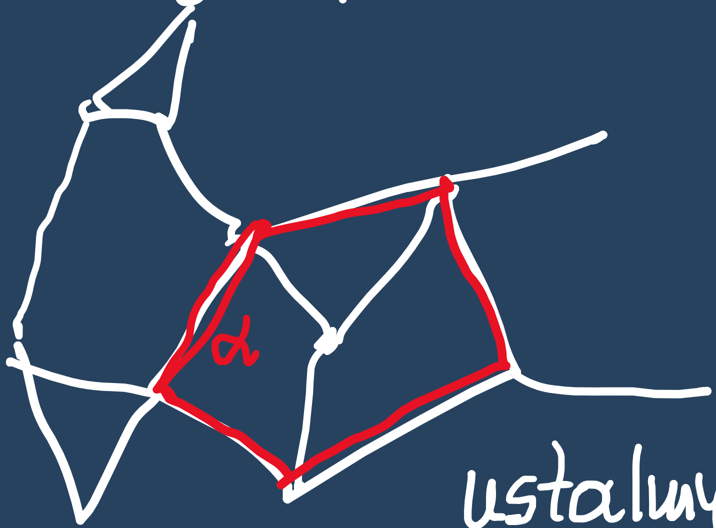
$f = 1$: $f - e + v = 1 - (v-1) + v = 2.$

- Krok indukcyjny.

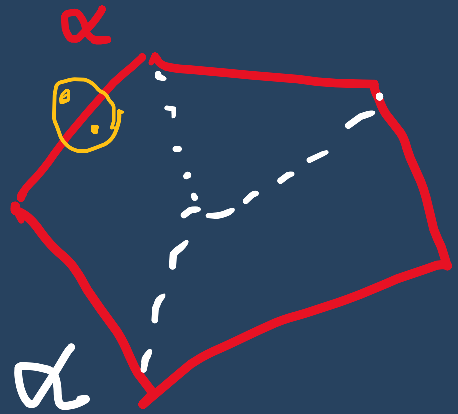
zał. że dla grafów o liczbie krawędzi $< e$ tw. jest prawdziwe, $e > n-1$.

TO NIE JEST DRZEWEM.

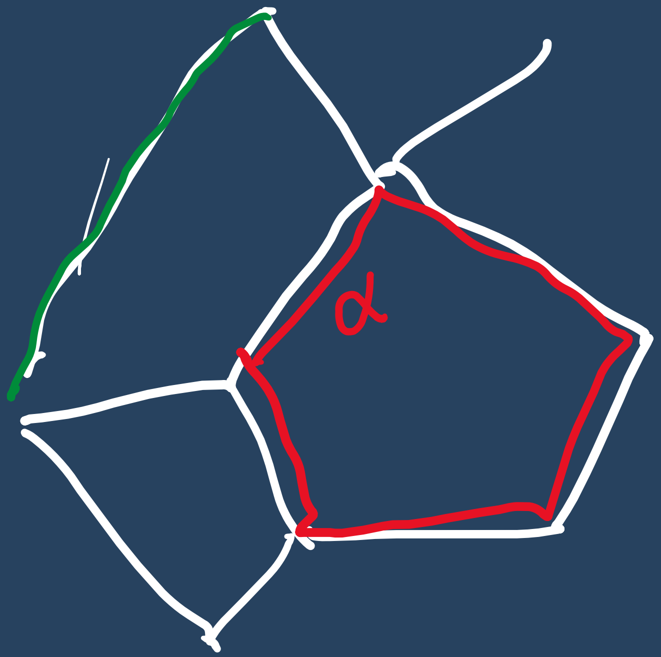
w grafie mamy cykl



ustalmy krawędź α z cyklu

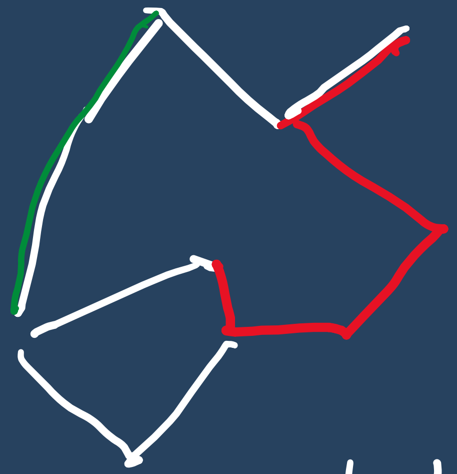


USUWAMY KRAWĘDŹ α.



(f, e, v)

$\Longrightarrow$



(f', e', v')

otrzymujemy graf planarny

STOS. ZAŁ. IND.

- $e' = e - 1$
- $f' = f - 1$
- $v' = v$

$$2 = f' - e' + v' = (f-1) - (e-1) + v$$
$$= f - e + v \quad \blacksquare$$

$$\boxed{f - e + v = 2}$$

WNIOSEK: wszystkie planarne realizacje grafu mają taką samą liczbę ścian.

$(f = 2 + e - v)$

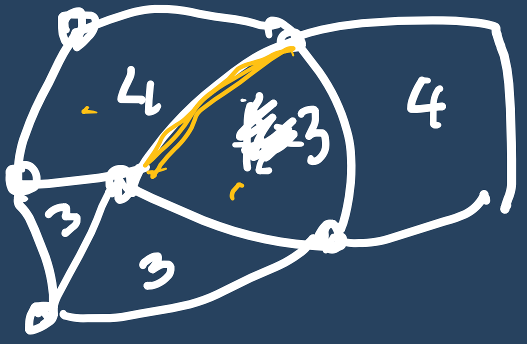
Ustalony graf planarny

f_i = liczba ścian o i krawędziach

- $\sum_i f_i = f$.

- $\sum_i f_i = f$
- $f_0 = f_1 = f_2 = 0$
- $\sum_{i \geq 3} i \cdot f_i = 2 \cdot e$

(bo krawędzie są liczone dwukrotnie)



(1) $2 \cdot e = \sum_{i \geq 3} i \cdot f_i \geq \sum_{i \geq 3} 3 \cdot f_i = 3 \cdot \sum_i f_i$

$= 3 \cdot f$

$$3f \leq 2e \quad ; \quad f \leq \frac{2}{3}e$$

$$2 = f - e + v \leq \frac{2}{3}e - e + v$$

$$= -\frac{1}{3}e + v$$

$$\frac{1}{3}e \leq v - 2$$

$$\boxed{e \leq 3v - 6}$$

Tw. w każdym grafie planarnym spójnym mam

$$e \leq 3v - 6.$$

$$\boxed{e \leq 3v - 6}$$

WNIOSEK : K_5 nie jest planarny

$v = 5$

$e = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ NIE

Zał. że graf nie ma Δ.

CZYLI $f_3 = 0$

$$2e = \sum_{i \geq 4} i \cdot f_i \geq 4 \sum_i f_i = 4f$$

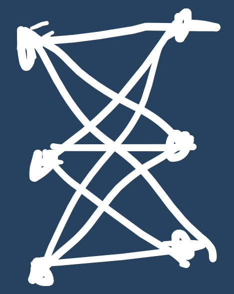
$$f \leq \frac{1}{2} e$$

$$2 = f - e + v \leq \frac{1}{2}e - e + v = -\frac{1}{2}e + v$$

$$\frac{1}{2}e \leq v - 2 \qquad e \leq 2v - 4$$

Wn. Jeśli graf jest planarny i ma $\triangle$ to $e \leq 2v - 4$

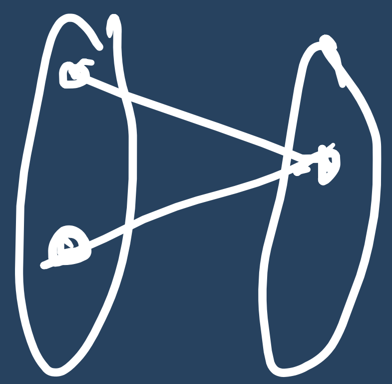
Wn. $K_{3,3}$ nie jest planarny

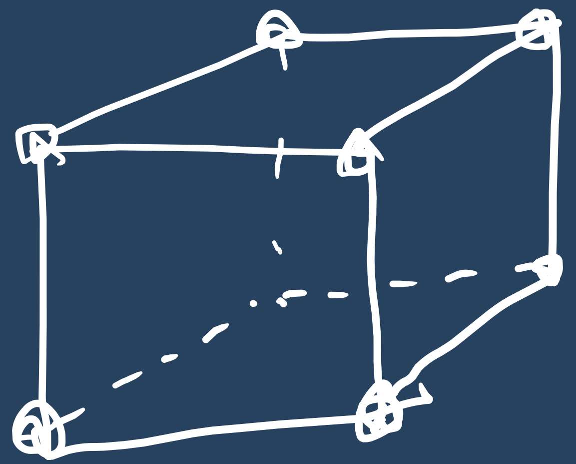


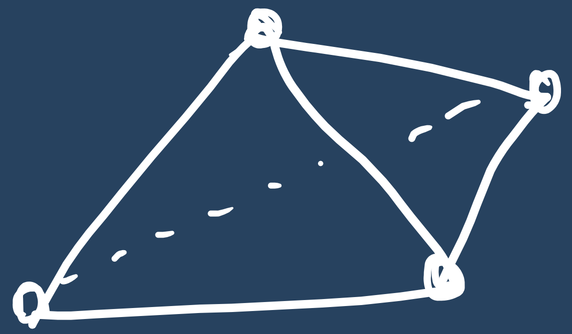
D-d

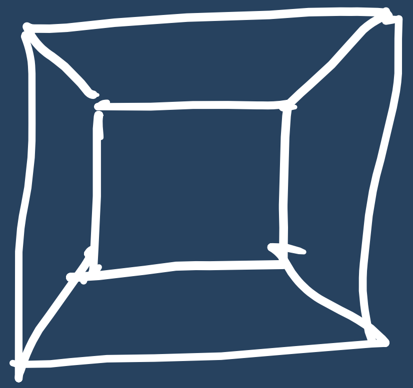
$$v = 3 + 3 = 6$$
$$e = 3 \cdot 3 = 9$$

$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8 \quad \text{FAŁSZ.}$$









Bryły platońskie

≡

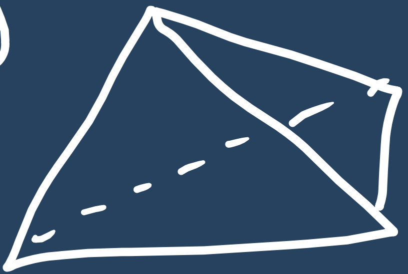
wielościany foremne

B. P ≡ • figura wypukła,

• wszystkie ściany są przystającymi do siebie wielokątami foremnymi

• ~~każdy wierz.~~ w wszystkie wierzchołki mają te sam rząd.

P



P

• 3 · △ ← tr. równob.

• rząd wierzch. = 3

• 6 · □

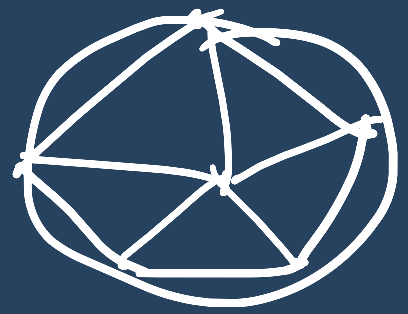
• rząd wierzch. = 3

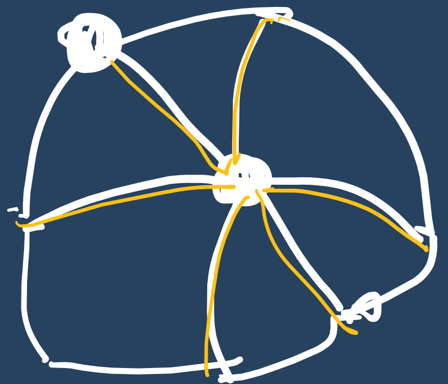
Zał. że mamy takie bryły.

- ściany n-kąty foremne
- rząd wierz. $= \alpha$.

$$\begin{cases} f \cdot n = 2e \\ v \cdot \alpha = 2e \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = \dfrac{2e}{n} \\[2ex] v = \dfrac{2e}{n} \end{cases}$$





$$2 = f - e + v = \frac{2e}{n} - e + \frac{2e}{a}$$

$$= e\left(\frac{2}{n} + \frac{2}{a} - 1\right)$$

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{a} - 1 > 0$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{a} > \frac{1}{2}$$

P1 $\boxed{n = 3}$ (trójk.)

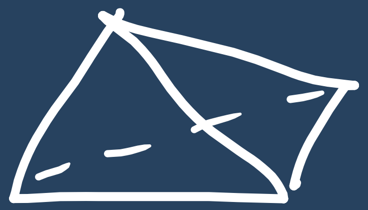
$$\frac{1}{a} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$a < 6$$

MOŻLIWE a:

$$a = 3, 4, 5$$

$n = 3, \quad a = 3, 4, 5$



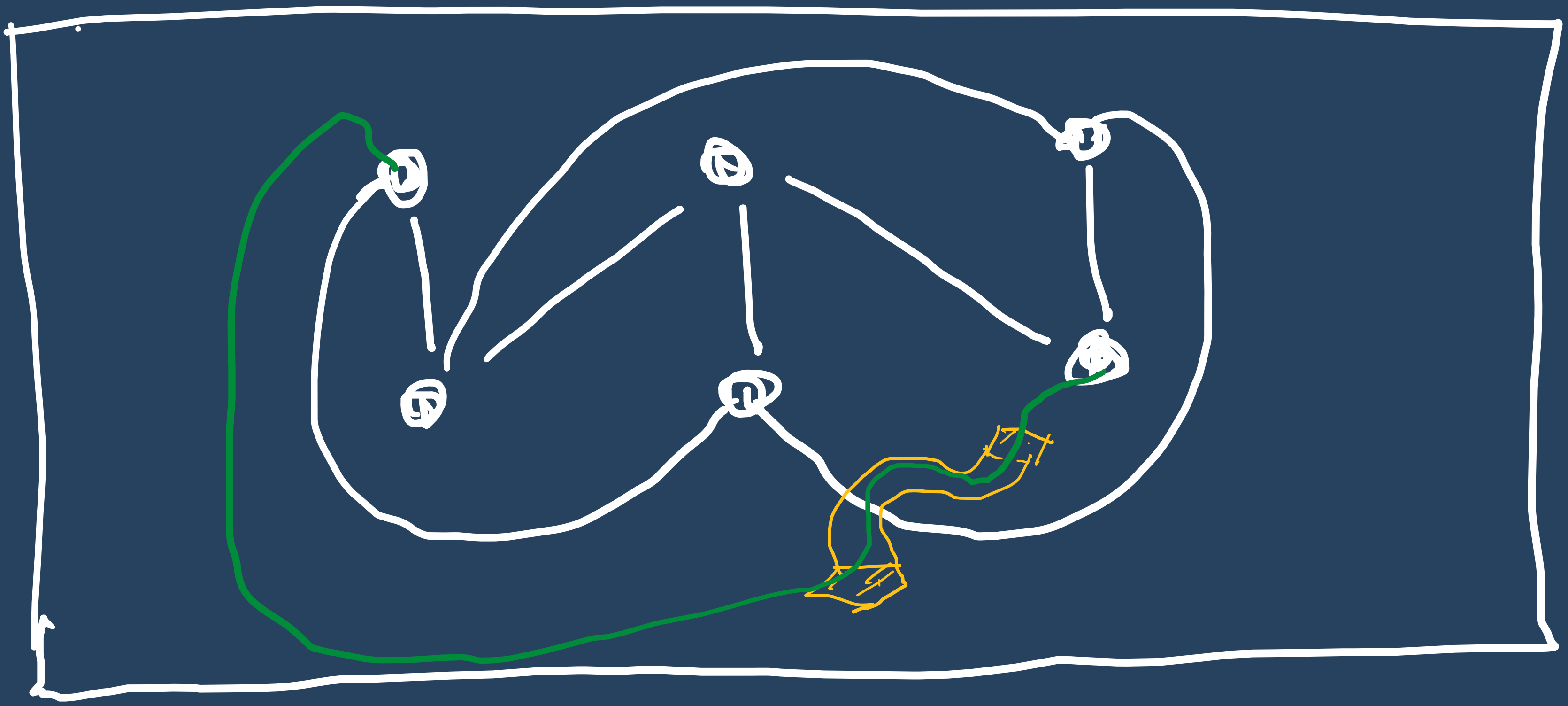
$a = 3$

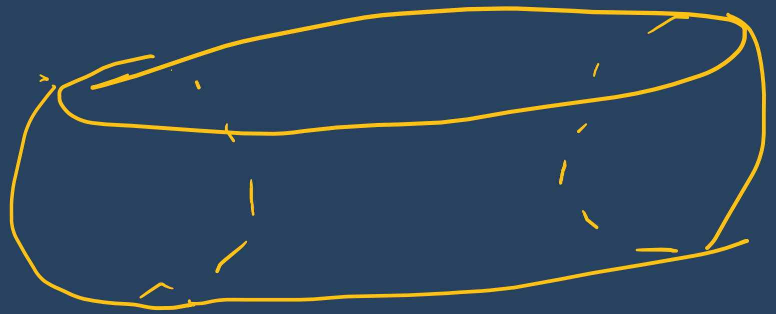
$a = 4$

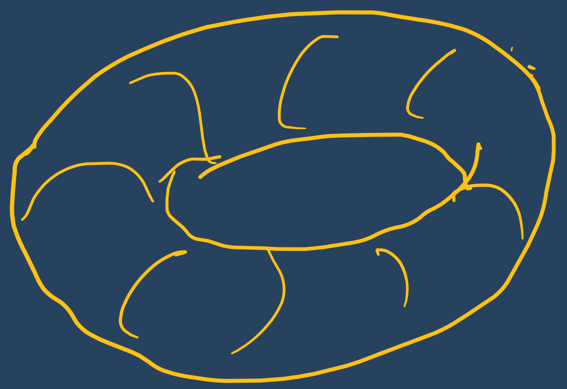
PZ $\quad n = 4$

ZADANIE: dokończyć te rozważania.

$K_{3,3}$

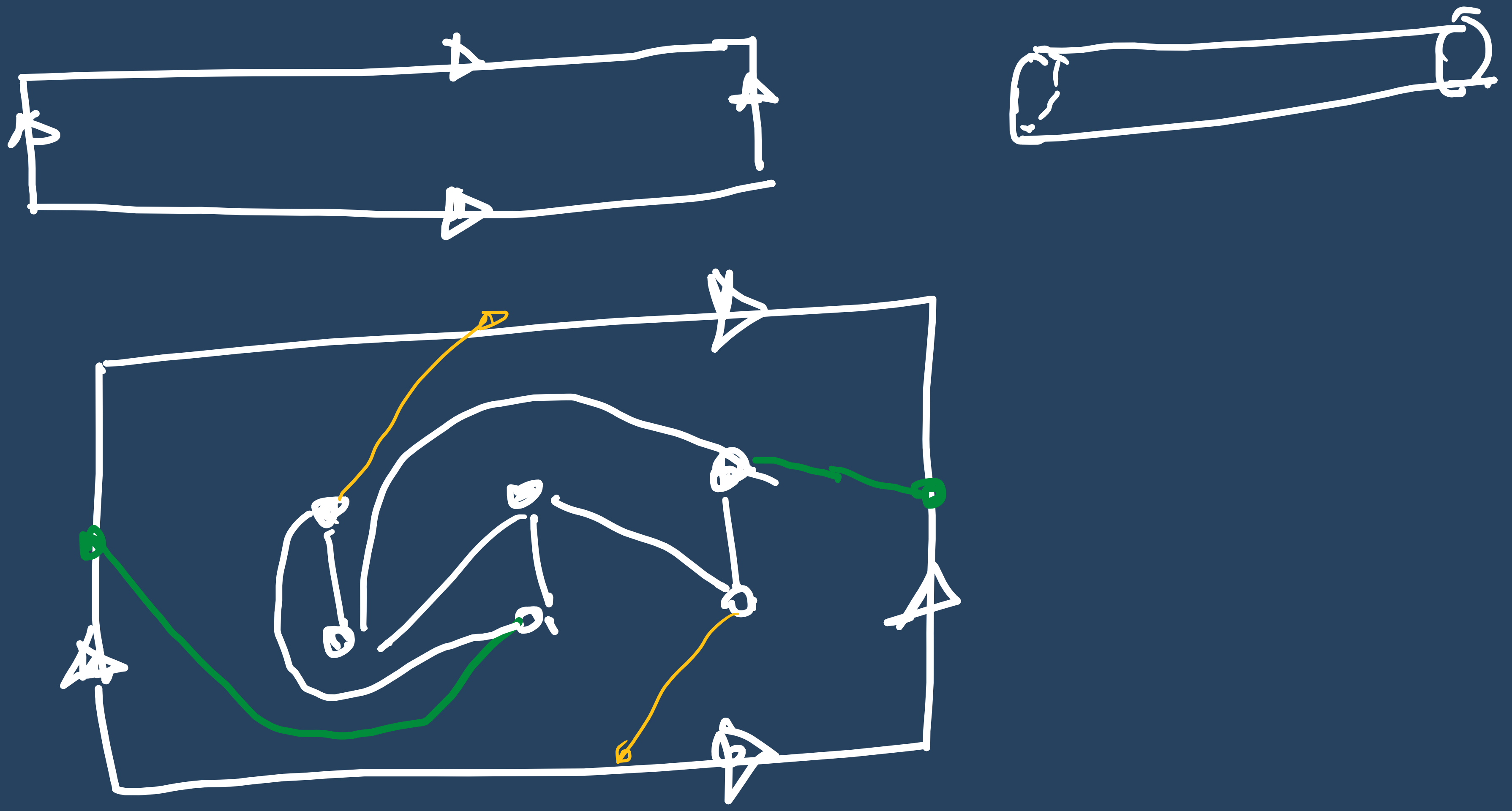






$K_{3,3}$ można tu zrealiz. bez przecięć.

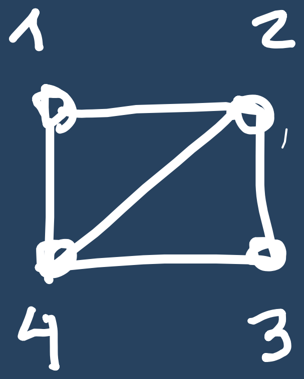
Jak zrobić nożeny torus ?



PROBLEM REPREZENTACJI

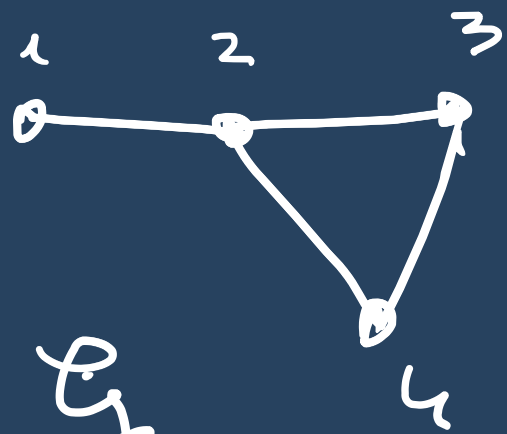
Grafy proste $(V, E) = G$

$$R(G) = \{ [G \setminus \{v\}]_{izo} : v \in V \}$$

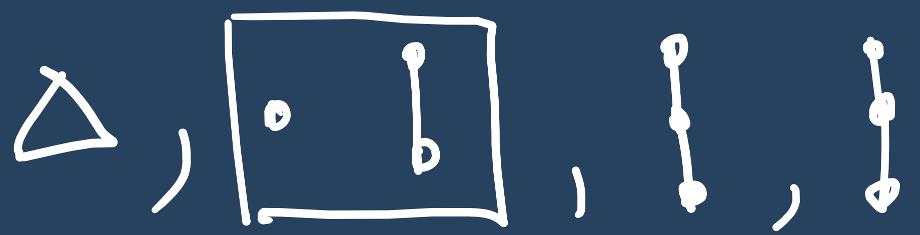


$R = \{ \Delta,$  $, \Delta,$  $\}$

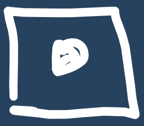
$= \{ 2 \cdot \Delta, 2 \cdot$  $\}$

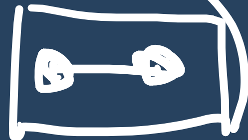


$\mathcal{G}$

$R = \{$  $\}$

$R(G) = \{\triangle, E_1 + L_2, 2 \cdot L_3\}$

(P) $R($  $) = \{2 \cdot$  $\}$

$R($  $) = \{2 \cdot$  $\}$

HIPOTEZA: Jeśli $R(\mathcal{G}_1) = R(\mathcal{G}_2)$

oraz $|V(\mathcal{G}_1)| = |V(\mathcal{G}_2)| > 2$ TO $\mathcal{G}_1 \underset{\text{IZO}}{\simeq} \mathcal{G}_2$ ⊠