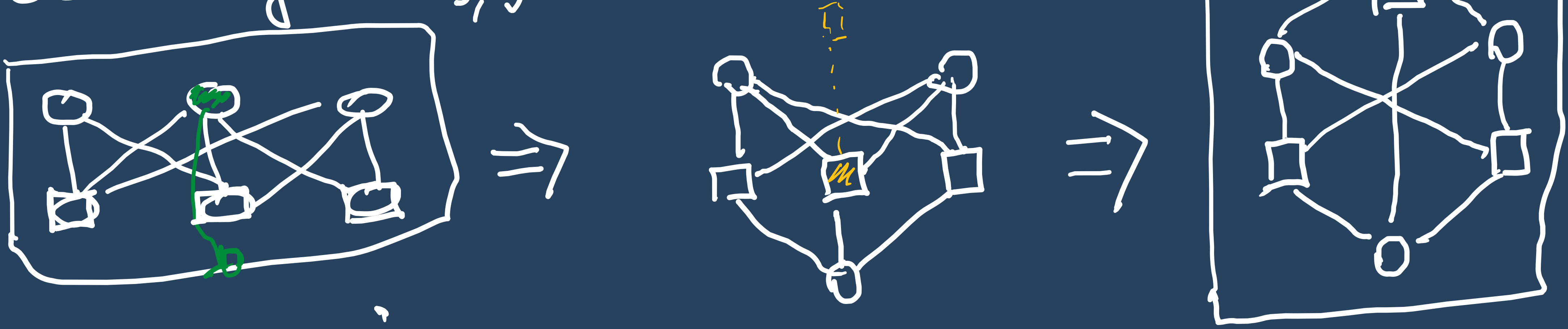
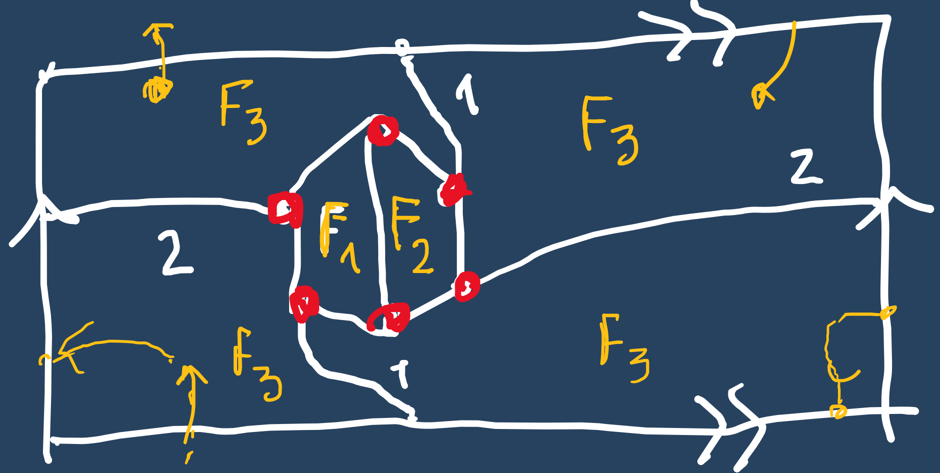
Realizacja $K_{3,3}$ na torusie



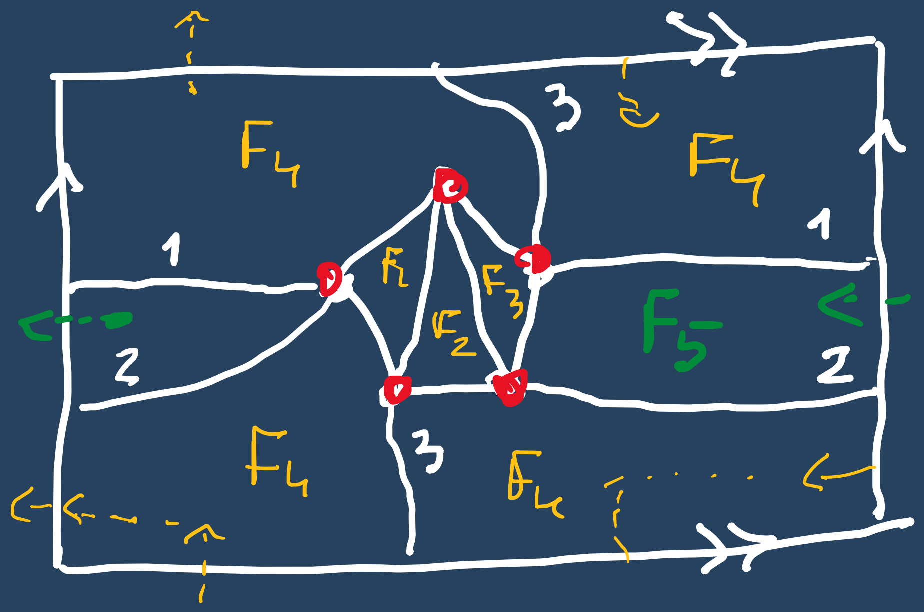
$K_{3,3}$



$$f = 3$$
$$e = 9$$
$$v = 6$$

$$\boxed{f - e + v = 0}$$

Realizacja K_5 na torusie



$f = 5$

$e = 10$

$v = 5$

$$\boxed{f - e + v = 0}$$

Def. (V_1, E_1) jest podgrafem (V_2, E_2)

$\iff$

$$V_1 \subseteq V_2 \wedge E_1 \subseteq E_2 \cap [V_1]^2$$

Def. $G_1=(V_1, E_1)$ jest podgrafem indukowanym grafu $G_2=(V_2, E_2)$ jeśli

$$V_1 \subseteq V_2 \wedge E_1 = E_2 \cap [V_1]^2$$

$$\boxed{G_1 = G_2[V_1]}$$

Operacje elementarne.

mamy $G=(V,E)$, $x \in V$, $e \in E$

- usuwanie wierzchołka:

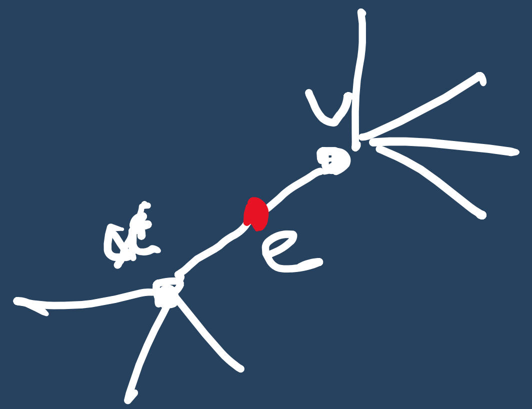
$$G-x = \left(V \setminus \{x\},\ E \cap [V \setminus \{x\}]^2\right)$$

- usuwanie krawędzi:

$$G-e = \left(V,\ E \setminus \{e\}\right)$$

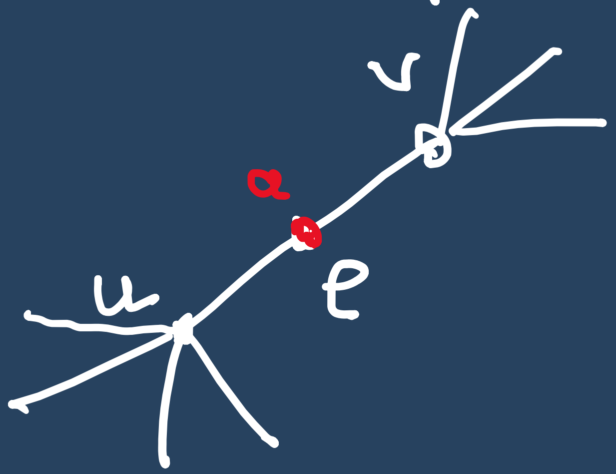
- podpodział G za pomocą e:

$G \cdot e$ -



$$G\cdot e = \left(V \cup \{a\},\ (E \setminus \{e\}) \cup \{\{u,a\},\{a,v\}\}\right)$$

$a \notin V$



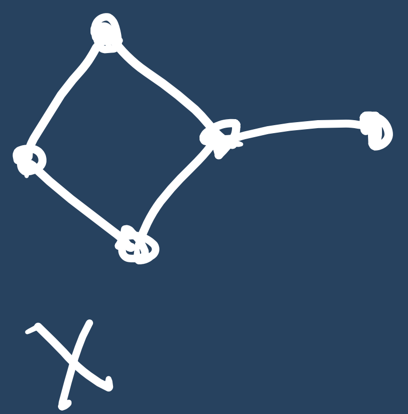
obserwacja:

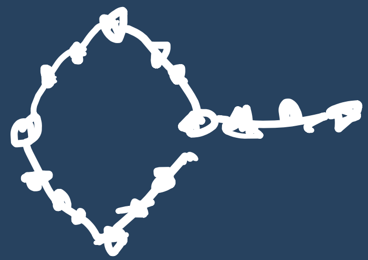
- $\deg_{G\cdot e}(a) = 2$
- $x \neq a \rightarrow \deg_G(x) = \deg_{G\cdot e}(x)$

Def. $G \in TX \equiv$ G można otrzymać z X za pomocą podpodz.

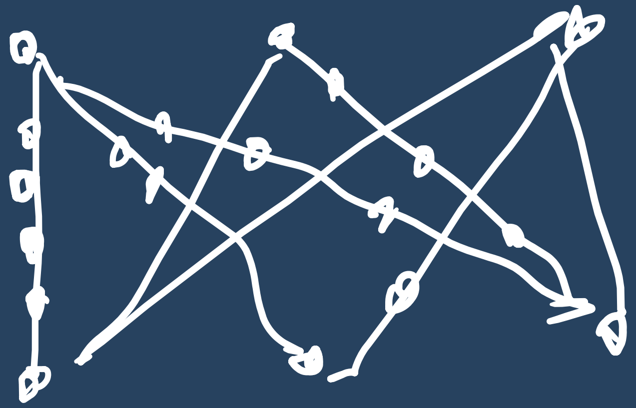
$\uparrow$ topol. modyf. grafu X

$\notin$

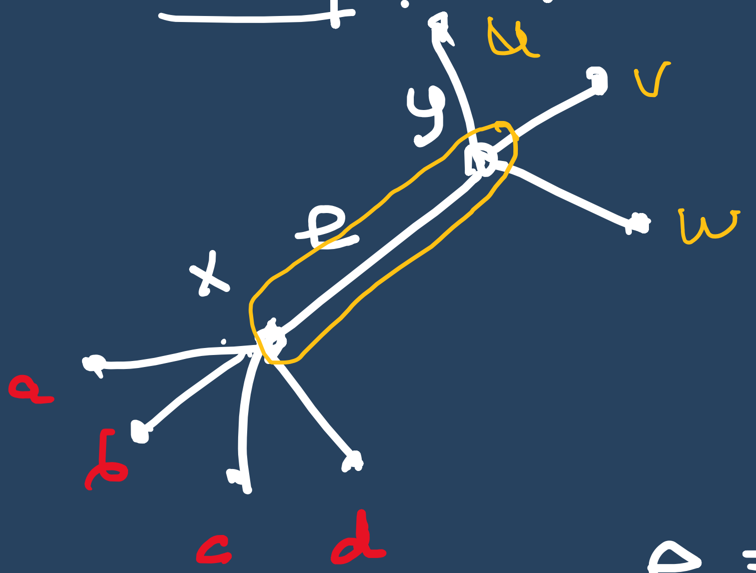


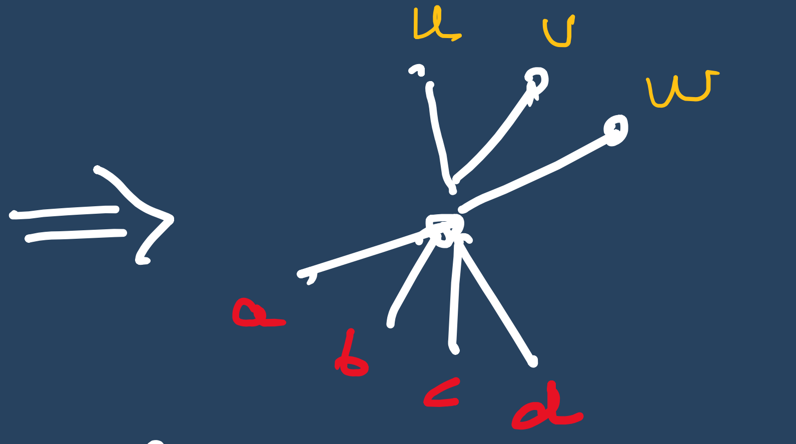


<u>Tw.</u> (Kuratowski) Graf nie jest planarny wtedy i tylko wtedy gdy zawiera on jakiś graf z TK_5 lub z $TK_{3,3}$.



Def. Kontrakcja krawędzi: G/e



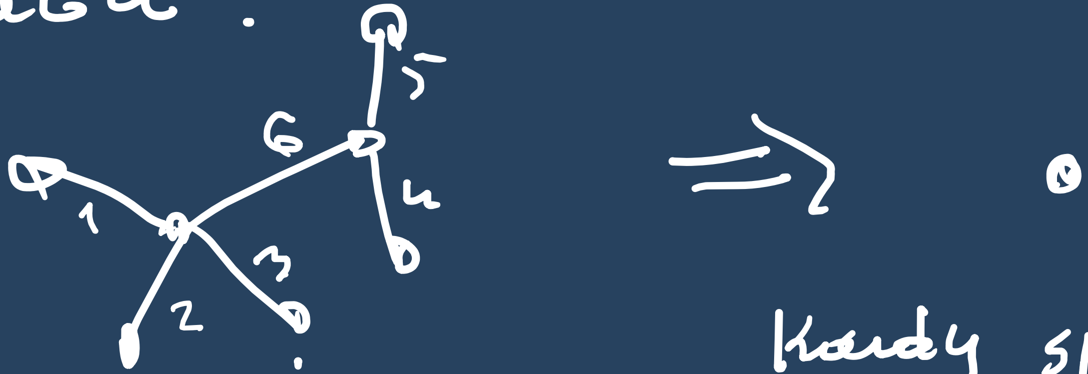


$$e = \{x, y\}$$

$$G/e = \left(V \setminus \{y\},\ (E \setminus \{e\}) \cup \{\{x,u\} : \{y,u\} \in E\}\right)$$

P

UWAGA :



spójny

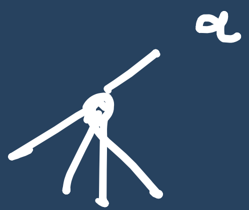
Każdy spójny można za pomocą kontrakcji sprow. do $\boxed{\bullet}$.

DEF. Graf H jest (indukowanym) MINOREM grafu G, jeśli istnieje (indukowany) podgraf G' grafu G, który za pomocą kontrakcji można przekszt. do H.

Def. Kontrakcja za pomocą krawędzi $e=\{x,y\}$ jest topologiczna $\equiv$ $\deg(x)=2$ lub $\deg(y)=2$

$\deg(y)=2$

$\Longrightarrow$



kontr. top $\equiv$ odwrotność podpodziału

Tw. H jest minorem G

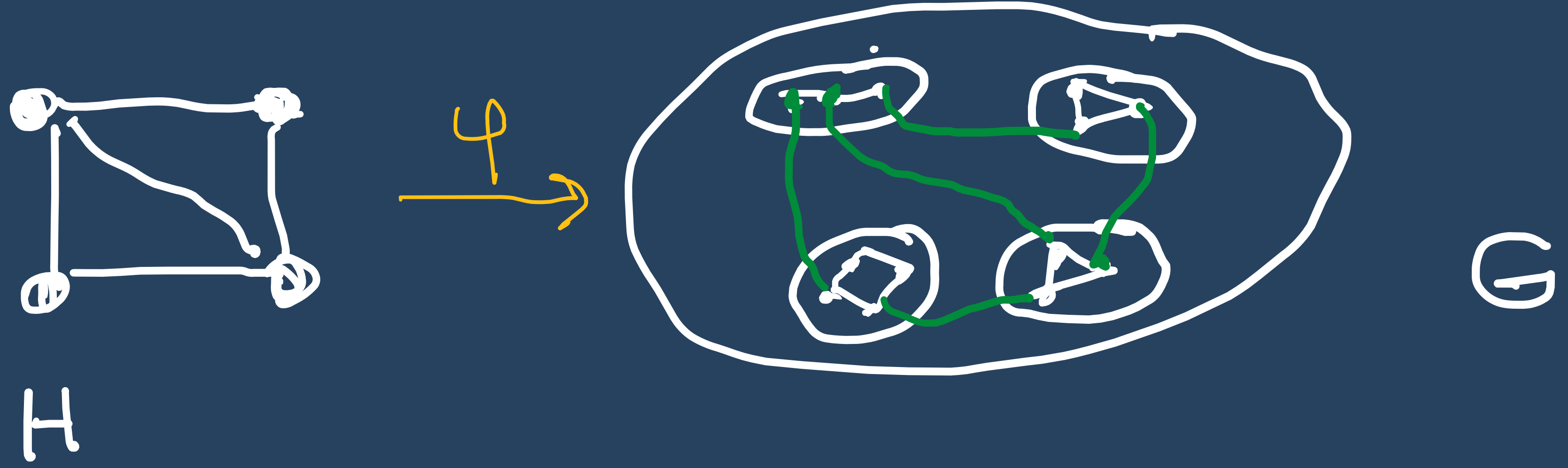
$\Updownarrow$

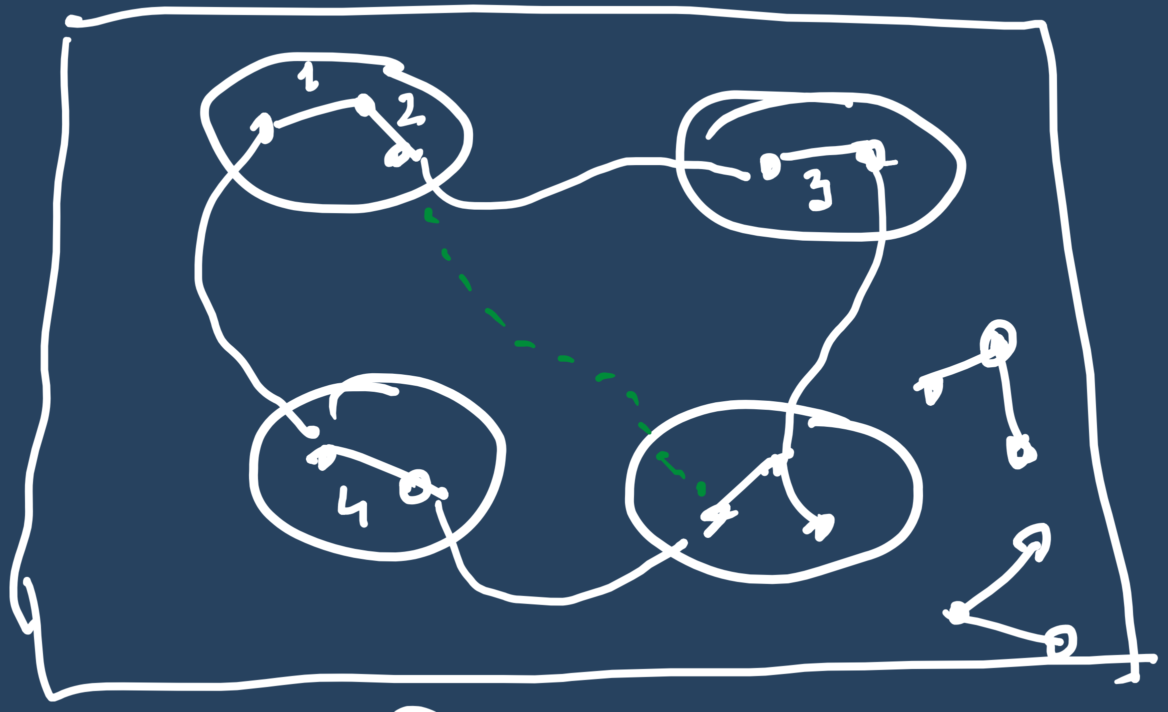
istnieje $\varphi : V(H) \longrightarrow P(V(G))$ t. że

1) $(\forall x \in H)\,(\varphi(x) \neq \emptyset \wedge \varphi(x)$ jest spójnym ~~podział~~ G $)$

2) $(\forall x, y \in H)\,(x \neq y \longrightarrow \varphi(x) \cap \varphi(y) = \emptyset)$

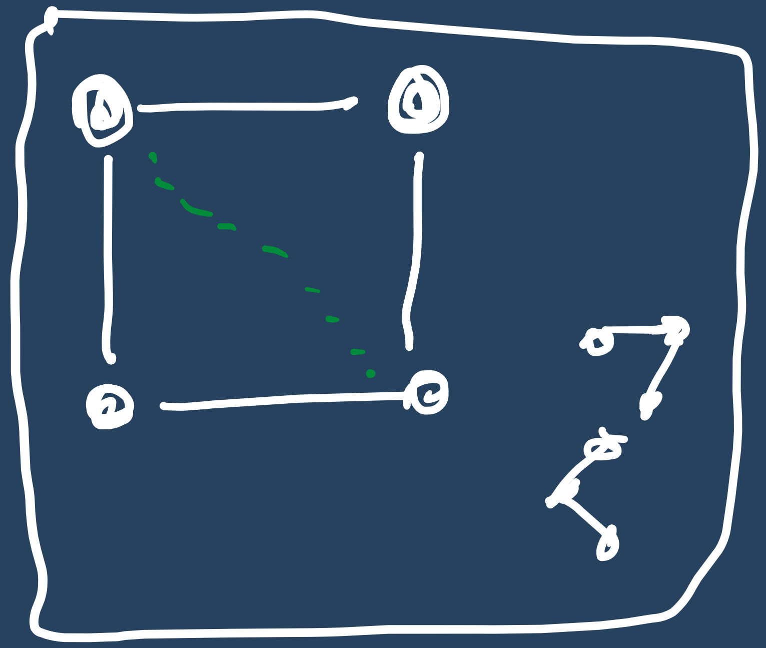
3) $(\forall x, y \in H)\,(\{x,y\} \in H \longrightarrow (\exists u \in \varphi(x))$
$(\exists v \in \varphi(y))\,(\{u,v\} \in G)$





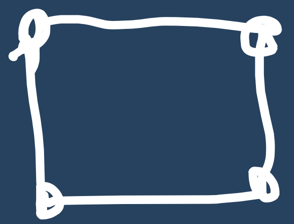
G

$\Rightarrow$ kontr.



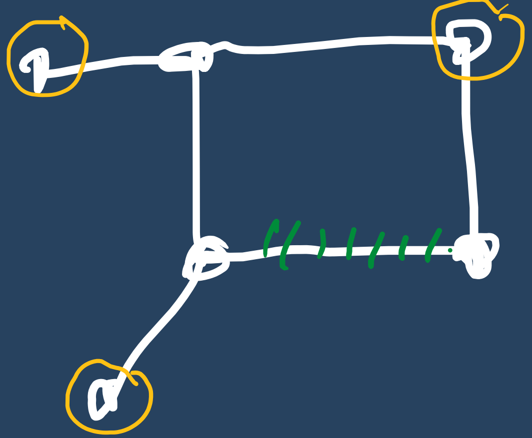
$\Downarrow$ usuwamy punkty

+ usuwamy krawędzie

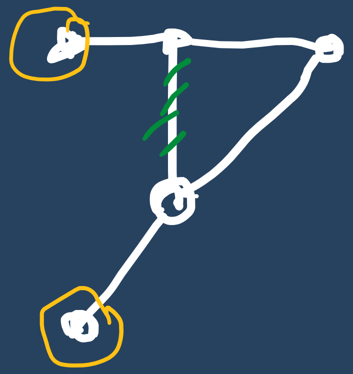


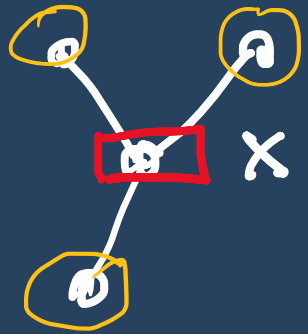
III

$G_0 = G \to G_1 \to G_2 \to \dots \to H$



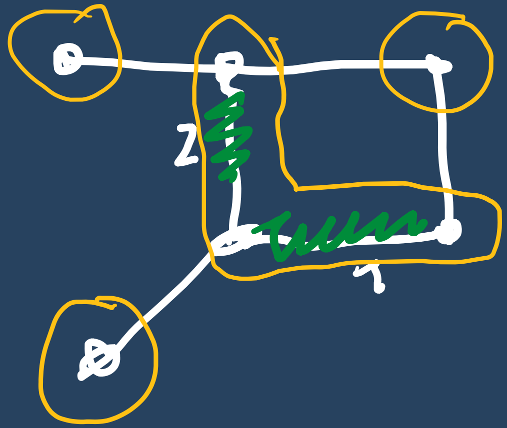
$\Longrightarrow$





• – punkt kontraktowany X; $e_1, \dots, e_k$ – użyte krawędzie

$$\varphi(X) = \bigcup_{i=1}^{k} e_i$$



• y nie był kontr

$$\varphi(y) = \{y\}$$

∎

Def. $X \preccurlyeq Y \equiv X$ jest minorem Y

To jest relacja na klasie grafów.

- $X \preccurlyeq X$
- $X \preccurlyeq Y \wedge Y \preccurlyeq Z \longrightarrow X \preccurlyeq Z$
- $X \preccurlyeq Y \wedge Y \preccurlyeq X \longrightarrow X = Y$

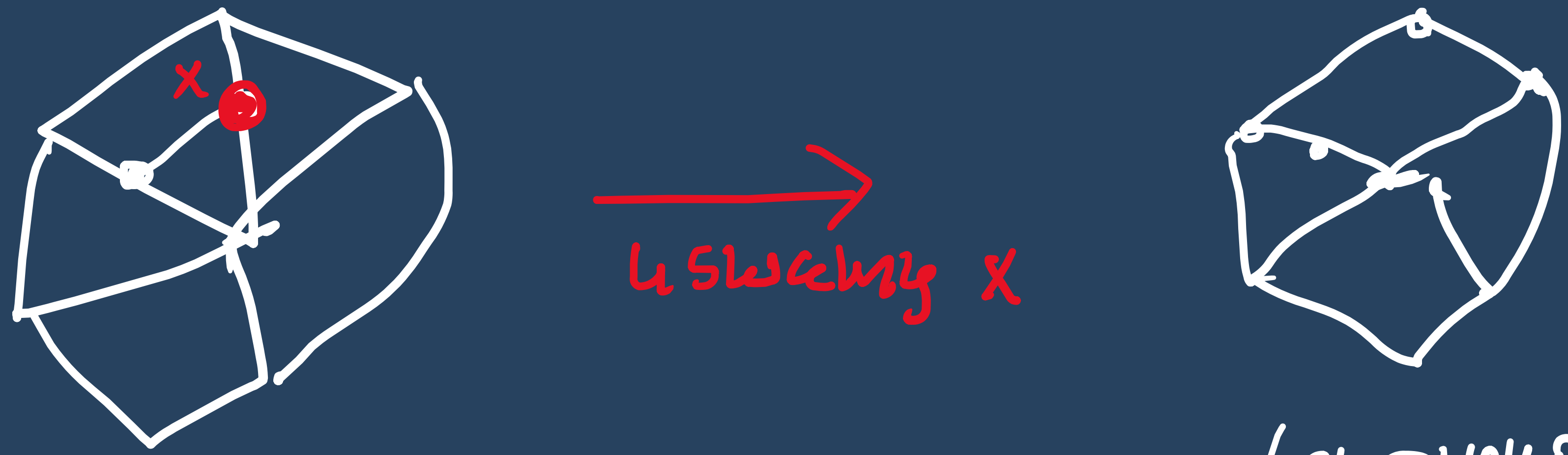
TW (Robertson, Seymour). Relacja $\preccurlyeq$ jest quasi-well ordered, czyli w $\preccurlyeq$ nie ma ∞ ostro malejących ciągów i nie ma ∞ antyłańcuchów.

$(X, \leq)$ – cz. porz. ; $A \subseteq X$ jest antył.

$$\equiv$$

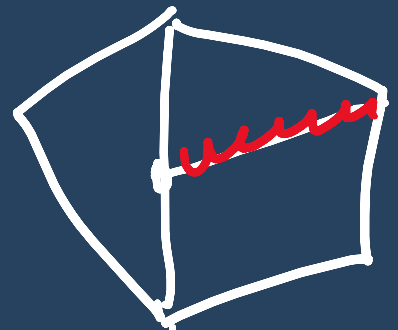
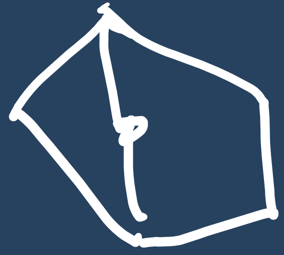
$$(\forall a,b \in A)\,(a \neq b \to \neg(a \leq b \lor b \leq a)).$$

MINORY A PLANARNOŚĆ.



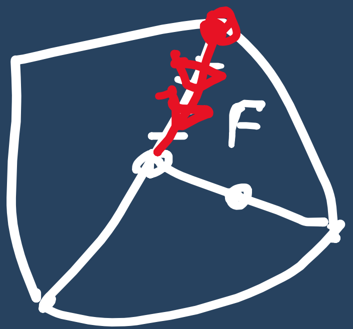
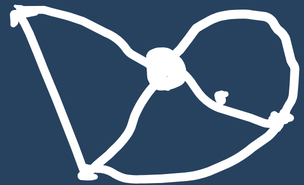
planarny

planarność

•  $\Rightarrow$ 

plan. plan.

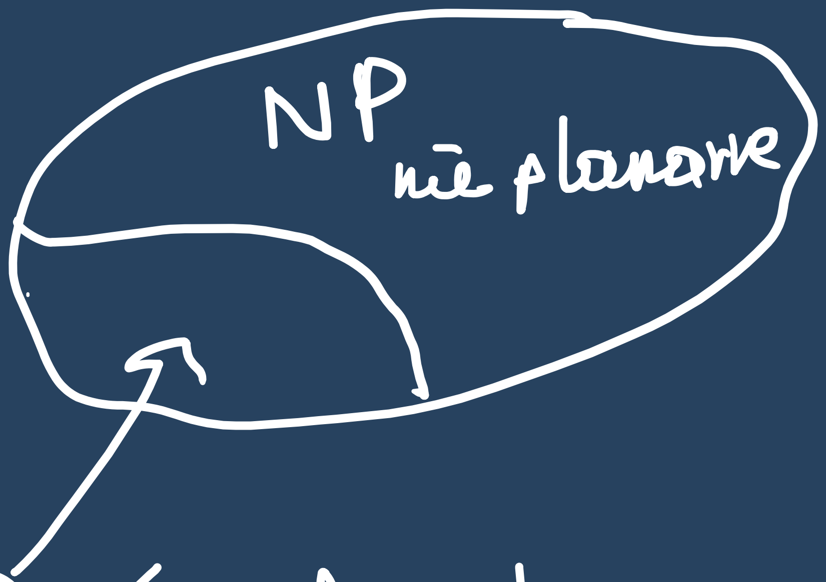
usuwanie kraw.

•  $\Rightarrow$ 

kontrakcje nie psują planarności.

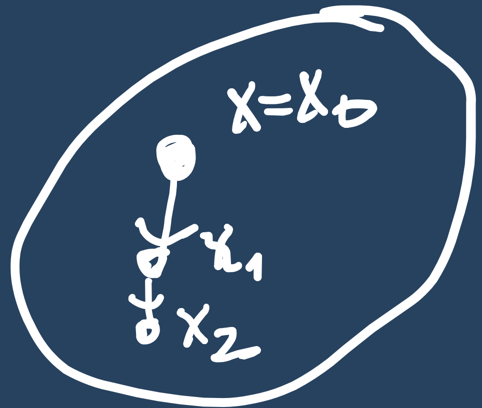
wn. $\left.\begin{array}{l} X \preccurlyeq Y \\ Y \text{ - planarny} \end{array}\right] \Rightarrow X$ jest planarny

Grafy



P (grafy planarne)

NP



$(NP, \leqslant \restriction NP)$

cz. porz.

- $(\forall x \in NP)(\exists y \leqslant x)$ (y - minimalny)

M = rodz. elem. minimalnych w NP

- M jest antyłańc.

WN. (R-S) $|M| < \infty$

$\underline{\underline{M}}$ - przeszkody

W naszym przyp. $M = \{K_{3,3}, K_5\}$

TO PRACUJE DLA NP TORUSA