Twierdzenie Erdösa.

Zał. że $r, s \geq 1$. Niech $(x_i)_{i=1 \dots r \cdot s+1}$ będzie ciągiem l. rzecz. Wtedy

1) istnieje podciąg $i_1 < \dots < i_{r+1}$ t. że
$$x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_{r+1}}$$

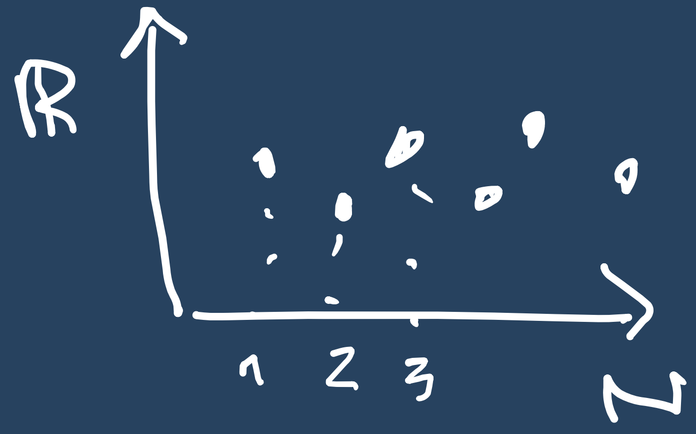
lub

2) istnieje podciąg $j_1 < j_2 < \dots < j_{s+1}$ t. że
$$x_{j_1} > x_{j_2} > \dots > x_{j_{s+1}}.$$

(P) $r = s = 2$: $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}$ $\quad x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq x_{i_3}$

lub $\quad x_{j_1} > x_{j_2} > x_{j_3}$

Rozw. (z ~~Kőniga~~ Dilworth).



$$X = \{(i, x_i) : i = 1 \ldots, rs+1\}$$

• $\begin{cases} i_1 < i_2 < i_3 < \ldots \\ x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq x_{i_3} \leq \ldots \end{cases}$

$$(i, x) \leq (j, y) \iff i \leq j \wedge x \leq y$$

Łańc. $\to (i_1, x_{i_1}) \leq (i_2, x_{i_2}) \leq (i_3, x_{i_3}) \leq \ldots$

• jeśli w $(X, \leq)$ jest łańcuch dług $r+1$ to OK

• zał. że każdy łańcuch w $(X,\leq)$ ma długość $\leq r$.

$\mathcal{L}$ = rozbicie $(X,\leq)$ na łańcuchy minimalnej mocy.

mamy również antył. w $(X,\leq)$ mocy $|\mathcal{L}|$.

▷ $X = \dot{\bigcup} \mathcal{L}$

▷ $r \cdot s + 1 = |X| = \sum_{L \in \mathcal{L}} |L| \leq \sum_{L \in \mathcal{L}} r = r \cdot |\mathcal{L}|$

zatem $|\mathcal{L}| > s$. // gdyby $|\mathcal{L}| \leq s$: $r \cdot s + 1 \leq r \cdot s$ ↯

mamy antył. A w $(X, \preceq)$ mocy $s+1$.

$$A = \{(i_1, x_{i_1}), \ldots, (i_{s+1}, x_{i_{s+1}})\}$$

możemy zał. że $i_1 < i_2 < \ldots < i_{s+1}$.

gdyby $x_{i_1} \leq x_{i_2}$ to $(i_1, x_{i_1}) \preceq (i_2, x_{i_2})$

ale to jest niemożliwe

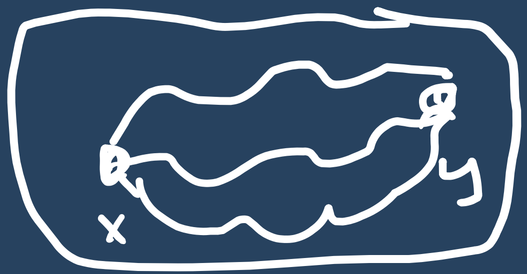
zatem

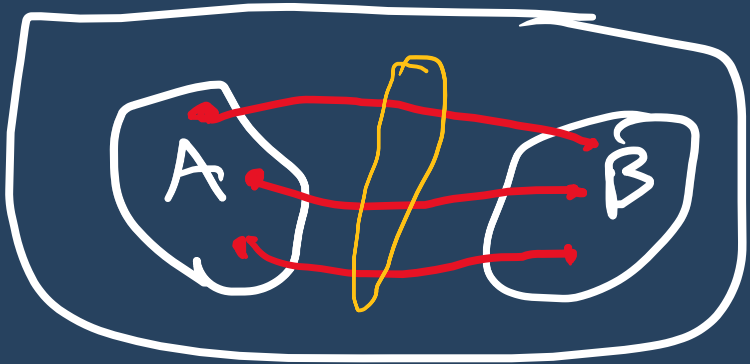
$$x_{i_1} > x_{i_2}, \ldots$$

mamy ciąg "ostro" malejący.

Menger $\to$ König $\to$ Dilworth $\to$ Erdős

Tw. Menger





Def. Ścieżki $x\, x_1 x_2 \dots x_n\, y$ i

$x\, z_1 z_2 \dots z_m\, y$

są wewn. rozł. jeśli

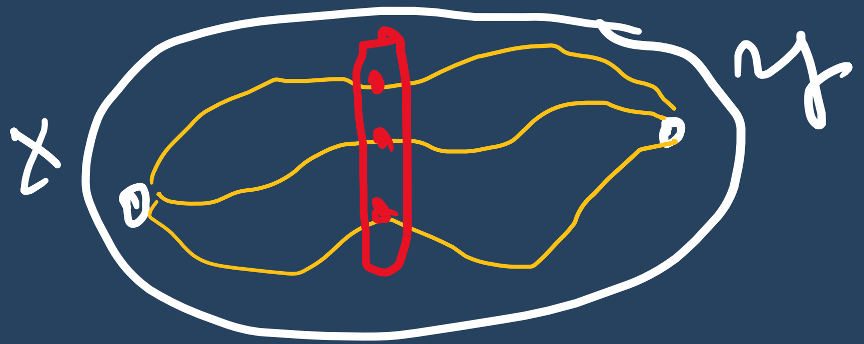
$$\{x_1, \dots, x_n\} \cap \{z_1, \dots, z_m\} = \emptyset$$

Tw [Menger, wersja wierzchołkowa].

Zał. że $G(V,E)$ jest spójny, $x,y \in V$, $x \neq y$ oraz $xy \notin E$. Wtedy nast. liczby są równe:

1) maks. moc wewn. rozł. xy-ścieżek.

2) $\min\{|A| : A \subseteq V \setminus \{x,y\} \wedge$ nie ma xy ścieżki w $G \setminus A\}$.



D-d. $A = N(x)$

$B = N(y)$

- $x \notin A, y \notin A$
- $x \notin B, y \notin B$
- $\{x,y\} \cap (A \cup B) = \emptyset$

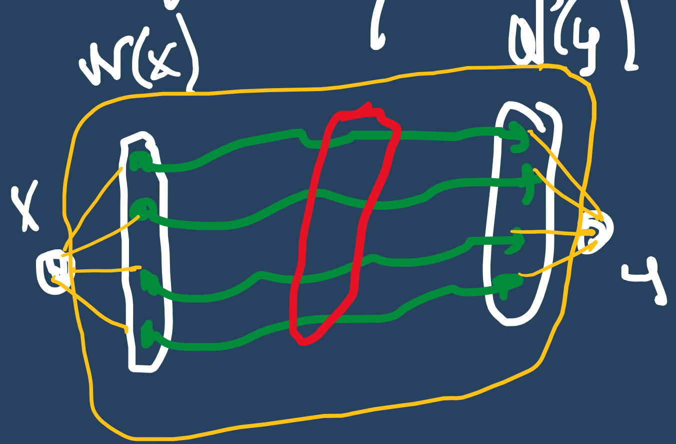
$\tilde{G} = G \setminus \{x,y\}$

Bierzemy A-B konektor w $\tilde{G}$

max ~~max~~. mocy

Bierzemy A-B sep. w $\tilde{G}$

OBA TEJ SAMEJ MOCY



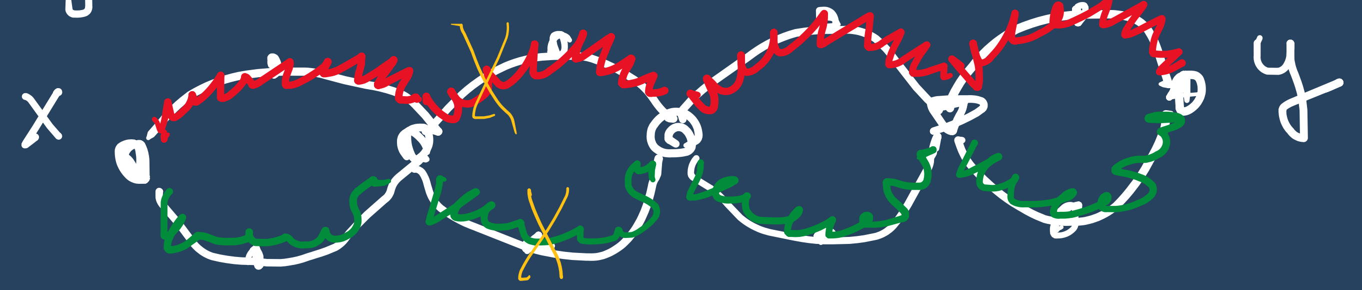
$\blacksquare$

Zadanie.

Dlaczego zał. że

$xy \notin E$?

wersja krawędziowa:



Def. Dwie ścieżki $x_1 e_1 x_2 e_2 \ldots e_{n-1} x_n$

i $y_1 f_1 y_2 f_2, \ldots f_{m-1} y_m$ są krawędziowo

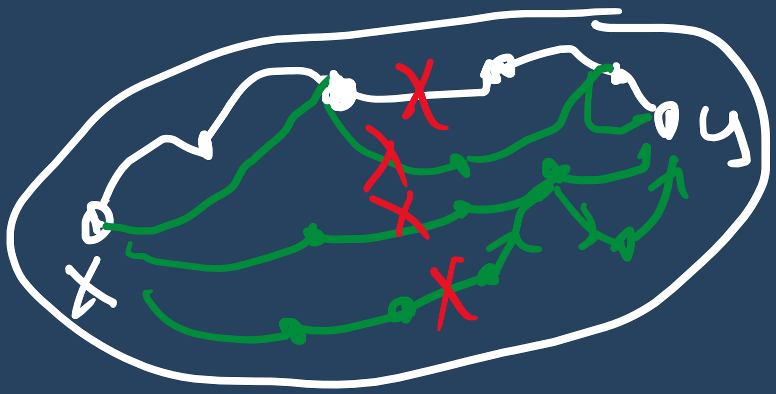
rozłączne jeśli

$$\{e_1, \ldots, e_{n-1}\} \cap \{f_1, \ldots f_{m-1}\} = \phi .$$

Tw (Menger, wersja krawędziowa).
Zał. że (V,E) jest spójny, $x,y \in V$ i $x \neq y$.
Wtedy nast. liczby są równe:

1) $\max\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P}$ jest rodz. xy ścieżek kraw. rozłącznych$\}$

2) $\min\{|A| : A \subseteq E \wedge$ w $(V, E \setminus A)$ nie ma xy ścieżki$\}$



D-d. Ustalamy $x, y \in V$, $x \neq y$

- ustalamy x', y' spoza V
- dodajemy krawędź

$$\alpha = \{x', x\}$$

$$\beta = \{y, y'\}$$

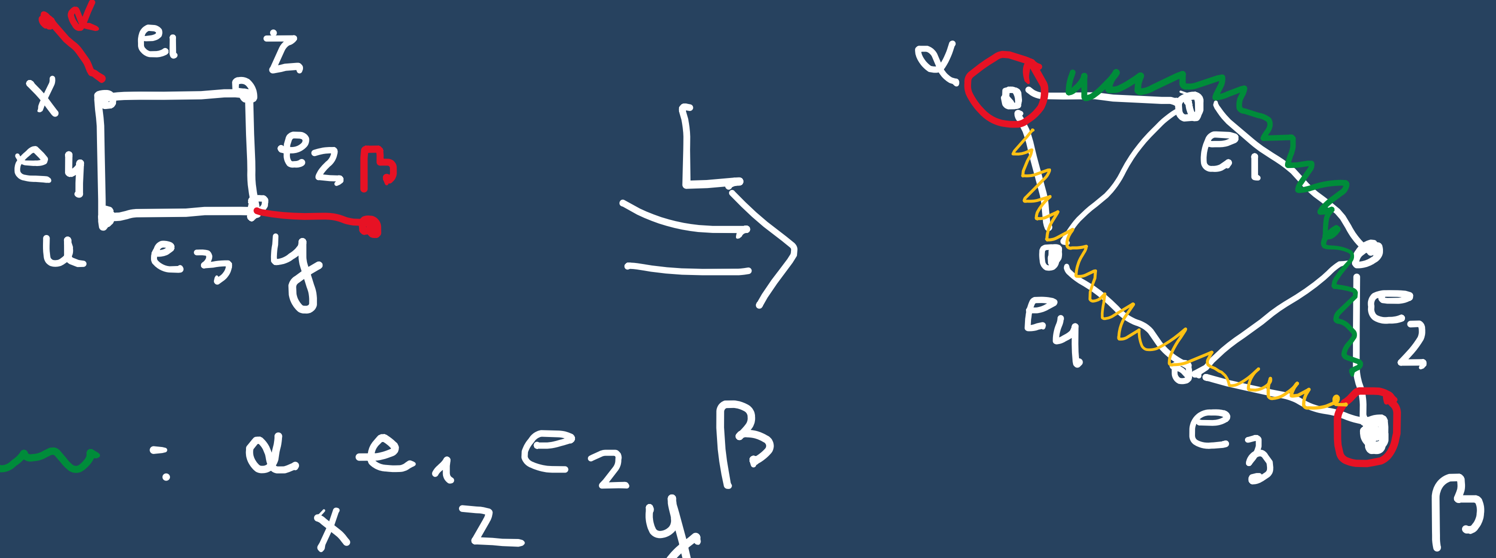
Rozważamy $\tilde{G} = (V \cup \{x', y'\}, E \cup \{\alpha, \beta\})$.

Przechodzimy do grafu $L(\tilde{G})$

Konst. $G = (V, E) \Rightarrow$

$$L(G) = (E, \{\{e, f\} \in [E]^2 : e \cap f \neq \emptyset\})$$

P



$S = \{e_2, e_3\}$

$:\ \alpha \ e_1 \ e_2 \ \beta$

$x \quad z \quad y$

$\alpha \ \boxed{x \, \underline{e_1} \, z \, \underline{e_2} \, y} \ \beta$ ← xy-scaeshee

$\alpha \ e_4 \ e_3 \ \beta$

$\alpha \ \boxed{x \, \underline{e_4} \, u \, \underline{e_3} \, y} \ \beta$ ← xy scaeshee

Wystarczy zauważyć, że

$$\alpha\beta \notin E(L(\tilde{G}))$$

bo $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Stos. wierz. wersje tw Mengera.

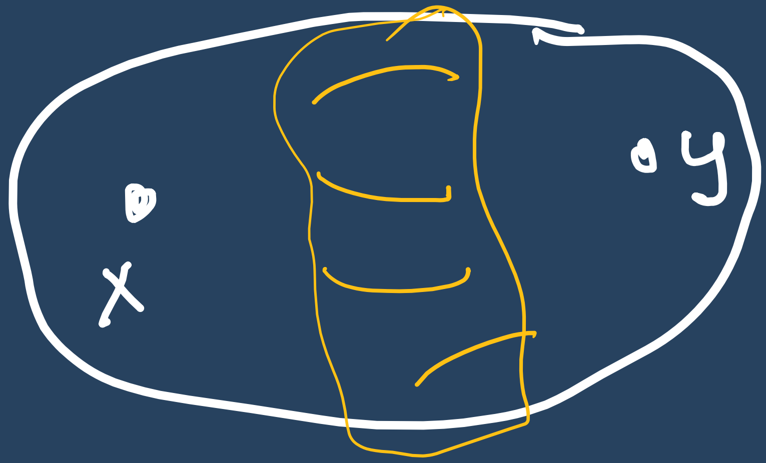
Otrz.

1) $\mathcal{P}$ - rodz kraw. rozł. xy ścieżek

2) $\mathcal{A}$ - rodz kraw. sep. x od y

t. że $|\mathcal{P}| = |\mathcal{A}|$.

OBSERWACJA. (wersja krawędz. tw Men.)



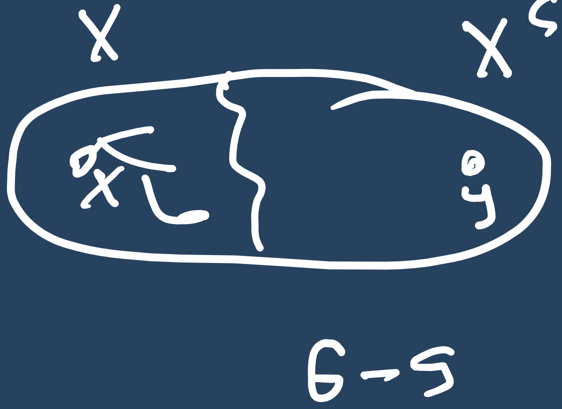
$G=(V,E)$ spójny, $x,y\in V$
$x\neq y$

S – ~~...~~ xy-separator minimalnej mocy.

- $G-S$: nie jest spójny
- ~~...~~ $S_1 = S\setminus\{e\}$; S_1 nie sep. x od y

X = skł. spójna x w $G-S$.

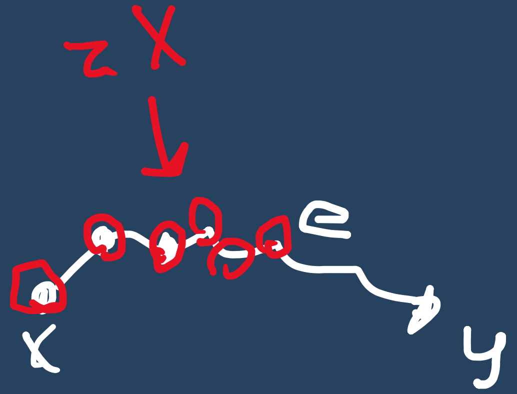
Oczywiście $x\in X$ oraz $y\notin X$.



$$E(X, X^c) = \{e \in E : e \cap X \neq \emptyset \wedge e \in X^c\}$$

св.-сп. в $G \setminus S$

$S \setminus \{e\}$:



минуя $S \setminus \{e\}$

- $E(X, X^c)$ явл. ~~sep~~ xy-sep.
- ~~$e \in S \wedge e \notin E(X, X^c)$~~

$$e \in E(X, X^c) \longrightarrow e \in S$$

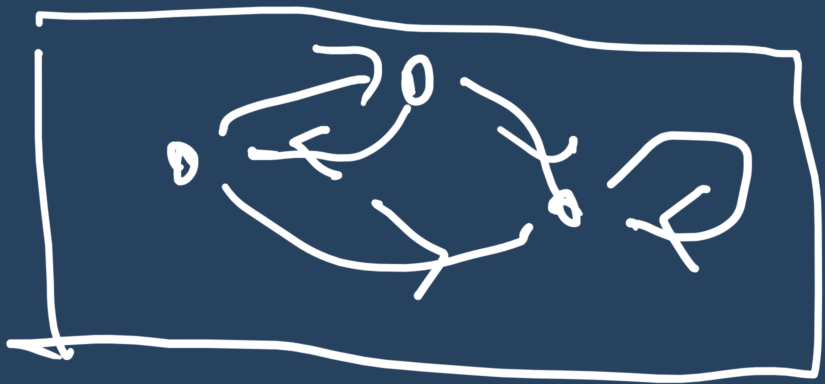
- $\underset{\uparrow \text{ sep}}{E(X, X^c)} \subseteq \underset{\uparrow \text{ sep, мин мощ}}{S}$

- $\boxed{E(X, X^c) = S}$

wniosek: sep. minimalnej mocy są postaci $E(X, X^c)$ dla pewnego $X \subseteq V$, $x \in X$, $y \notin X$.

<u>DEF</u>. Graf skierowany:

(V, E, φ) : $\varphi : E \longrightarrow V \times V$



Szkielet grafu (V, E, φ) $\Leftarrow$ skier.

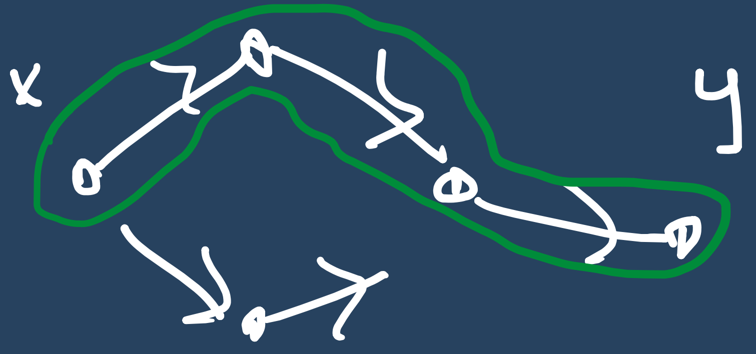
$$(V, \tilde{E}, \tilde{\varphi}) : \quad \tilde{\varphi}(e) = \{u, v\}$$

jeśli $\varphi(e) = (u, v)$

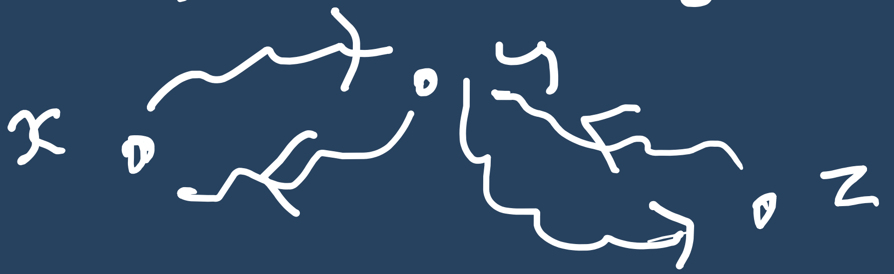
lub $\varphi(e) = (v, u)$.

Składowe silnie spójne:

$G=(V,E,\varphi)$.

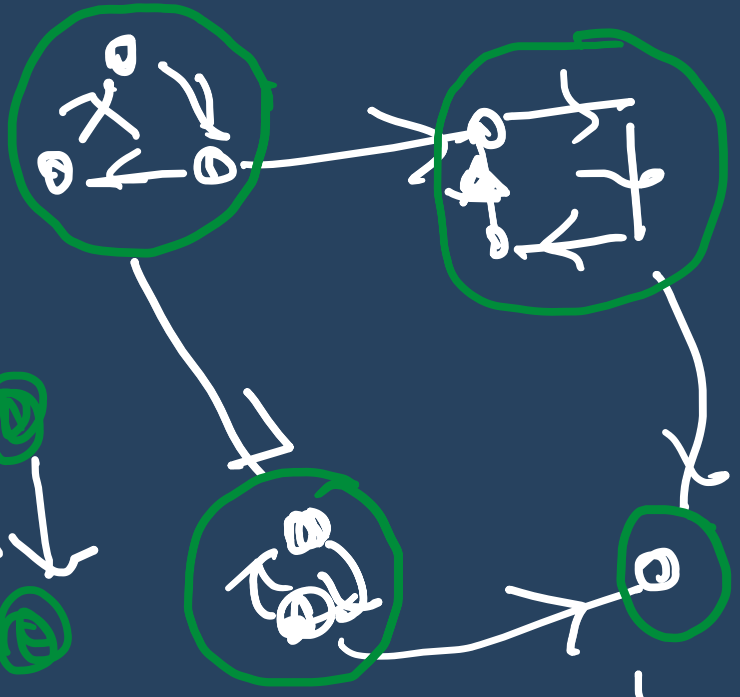


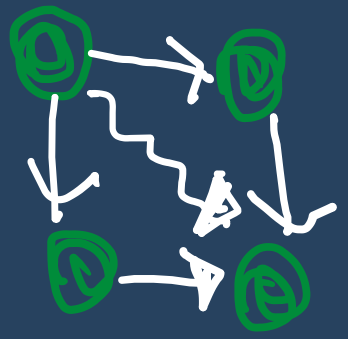
- def. pojęcie ścieżki
- $x \gg y \equiv$ istn. ścieżka skierowana z x do y $\boxed{x \gg x}$
- $(x \approx y) \equiv (x \gg y) \wedge (y \gg x)$



$\approx$ rel. równow. na V.

- klasy abstrakcji $\approx$: silne spójne ~~spójne~~ składowe





CZ. PORZ.

- $[x] > [y]$

$\Updownarrow$

istnieje ~~są~~ xy ścieżka w G

Popr. $x \approx x'$: ist. xy-ścieżka
$y \approx y'$

$\Downarrow$

istn. $x'y'$ ścieżka

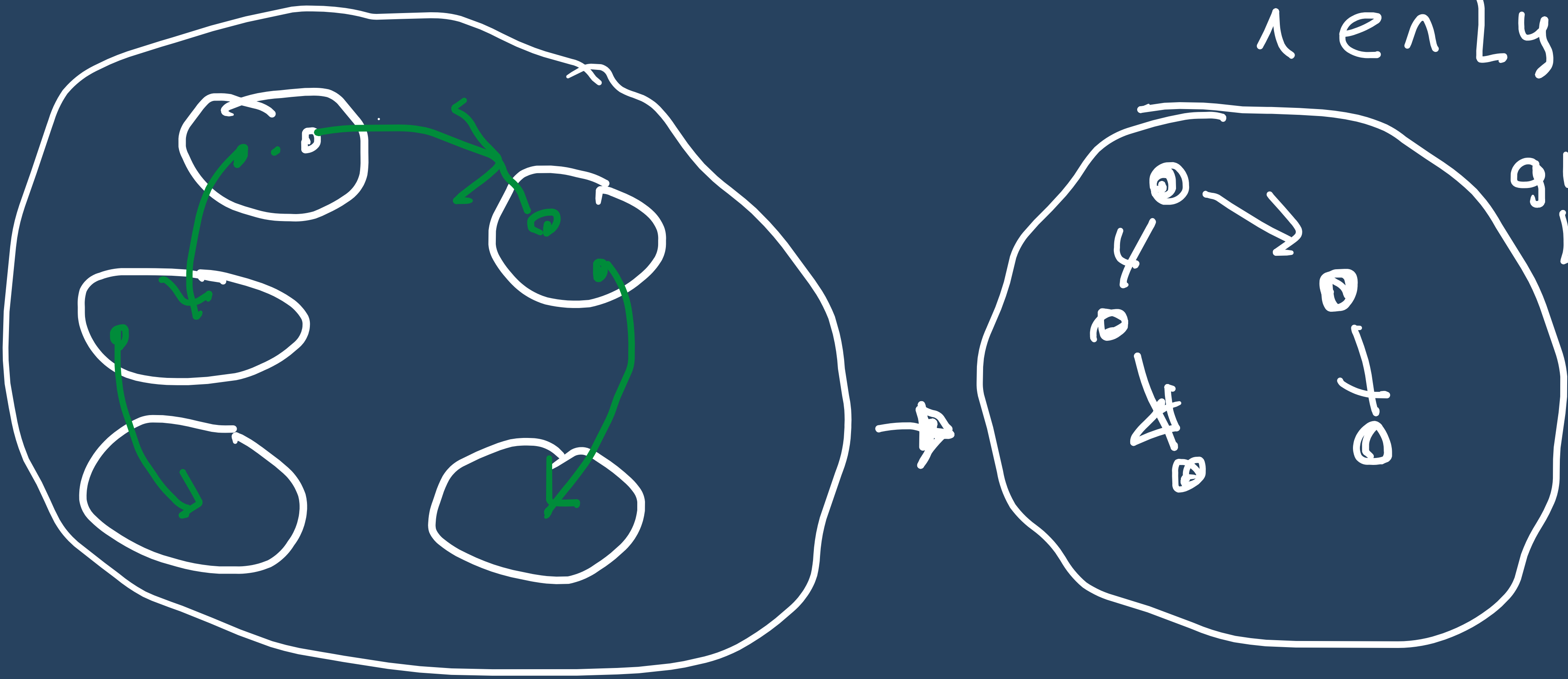
wn. $\underbrace{(V/\sim, \leq)}$ – cz. porządek.

kondensacja grafu skierow.

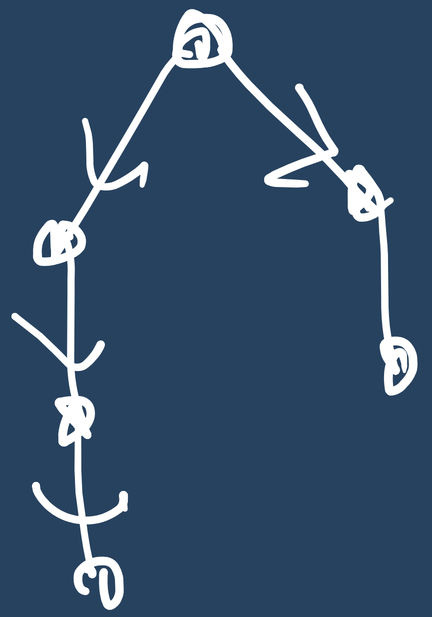
$$\left.\begin{array}{l}[x] \geq [y] \\ [y] \geq [x]\end{array}\right\} \rightarrow [x] = [y]$$

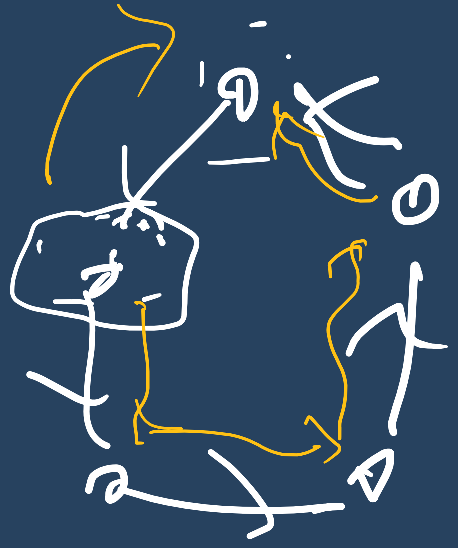
Trochę inna konstr.

$$[x]_{\sim} \to [y]_{\sim} \quad \equiv \quad (\exists e \in E)\,\big([x] \cap e \neq \emptyset \wedge e \cap [y] \neq \emptyset\big)$$



grafowe kondensacja





To jest graf skier. acycykliczny

DIRECTED ACYCLIC GRAPH

(DAG).