Tautologie - CD

① $\models (p \wedge \neg p) \to q$ (równ. $\models \bot \to q$)

② $\models (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$

③ $\models (p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

D-d. $p \to q \equiv \neg p \vee q$

$\neg q \to \neg p \equiv \neg\neg q \vee \neg p \equiv q \vee \neg p \equiv \neg p \vee q$

(P) Pok. że $\underbrace{\frac{x+y}{2} > 1}_{p}$ impl. że $\underbrace{x>1 \text{ lub } y>1}_{q}$.

Zał. że

$\neg((x>1) \vee (y>1))$. wtedy $\neg(x>1) \wedge \neg(y>1)$, czyli

$x \leq 1$ i $y \leq 1$, więc $x+y \leq 2$, więc $\frac{x+y}{2} \leq 1$.

Pok. że

$\neg q \to \neg p$ □

④ $\vdash ((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$

D-d $(p \to q) \wedge (\neg p \to q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee q)$

$\equiv (\neg p \wedge p) \vee q \equiv \bot \vee q \equiv q$ ∎

⑤ Pok. że $\underbrace{x \leq |x|}_{q}$ dla dow. $x \in \mathbb{R}$.

1) $\underbrace{x \geq 0}_{p}$: $|x| = x \geq x$; czyli $x \leq |x|$

2) $x < 0$: $x < 0 \leq |x|$; czyli $x \leq |x|$.

ZADANIE: Pok. że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Synteza formuł.

$$7 = 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 = (111)_2$$

	p	q	r	φ	α	β
$(7)_2$	1	1	1	1	0	0
	1	1	0	1	0	0
	1	0	1	0	0	0
	1	0	0	1	1	0
	0	1	1	0	0	0
	0	1	0	1	0	1
$(1)_2$	0	0	1	0	0	0
$(0)_2$	0	0	0	1	0	0

$$\alpha = p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

$$\beta = \neg p \wedge q \wedge \neg r$$

$\{\vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$ – układy pełne (zupełne) spójników

$$\varphi = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

NOTACJA POLSKA (odwrotna)

$$\ulcorner p \urcorner = p \qquad (p \in \mathcal{P})$$

$$\ulcorner \top \urcorner = \top \qquad \ulcorner \bot \urcorner = \bot$$

$$\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner \ulcorner \psi \urcorner \vee$$

podobnie dla $\wedge, \to, \leftrightarrow$

$$\ulcorner \neg \varphi \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner \neg$$

P $\ulcorner (p \vee q) \wedge r \urcorner = \ulcorner p \vee q \urcorner \ulcorner r \urcorner \wedge = \ulcorner p \urcorner \ulcorner q \urcorner \vee \ulcorner r \urcorner \wedge =$

$= p q \vee r \wedge .$

$\alpha = p\ q\ \vee\ r\ \wedge$

stos

1 $\boxed{}$ 2 $\boxed{p}$ 3 $\boxed{p}\ \boxed{q}$ 4 $\boxed{p}\ \boxed{q}\ \boxed{\vee} \rightarrow \boxed{p \vee q}$

5 $\boxed{(p \vee q)}\ \boxed{r}$ 6 $\boxed{p \vee q}\ \boxed{r}\ \boxed{\wedge} \rightarrow \boxed{(p \vee q) \wedge r}$

$(x+y)\cdot(u+v) \leadsto x\ y + u\ v + \cdot$

Reguły dowodzenia

<u>Def</u>. Załóż, że $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \mathcal{L}(P)$. Mówimy, że $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$ jeśli dla dowolnej walucji π t.że $\pi(\varphi_1) = \ldots = \pi(\varphi_n) = 1$ mamy również $\pi(\psi) = 1$.

Tw. $\Leftrightarrow$ 1) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$

2) $\models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$

D-d. 1) $\to$ 2) weźmy dow. waluację π. taką, że $\pi((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi) = 1$.

chcemy pok.
- $\pi(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \ldots \wedge \varphi_n) = 0$ to ok.
- $\pi(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1$; $\pi(\varphi_1) = \ldots = \pi(\varphi_n) = 1$; więc $\pi(\psi) = 1$.

(2) $\to$ (1)
π dowolna wal. t.że $\pi(\varphi_1) = \ldots = \pi(\varphi_n) = 1$
ALE $\pi(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi) = 1$
WIĘC $\pi(\psi) = 1$.

(P1) $\{\varphi, \neg\varphi\} \models \psi$

OCZYWISTE : $\models (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$

(P2) $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_1$

$\{\varphi\} \models \varphi$

(P3) $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$ MODUS PONENS

(P4) $\{\varphi \vee \alpha, \neg\varphi \vee \beta\} \models \alpha \vee \beta$ REZOLUCJA

D-d. Bierzemy π t. że $\pi(\varphi \vee \alpha) = \pi(\neg\varphi \vee \beta) = 1$

- $\pi(\varphi) = 0$; ale wtedy $\pi(\alpha) = 1$; więc $\pi(\alpha \vee \beta) = 1$.
- $\pi(\varphi) = 1$; ale wtedy $\pi(\neg\varphi \vee \beta) = 1$; więc $\pi(\beta) = 1$

  więc $\pi(\alpha \vee \beta) = 1$

OZNACZENIE:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$$

$$\equiv$$

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n}{\psi}$$

MODUS PONENS:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$

REZOLUCJA

$$\frac{\varphi \vee \alpha, \neg\varphi \vee \beta}{\alpha \vee \beta}$$

UWAGA: $\frac{\varphi, \neg\varphi}{\square}$

$$\models \varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$$

FAKT: 1) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$ $\leftrightarrow$ 2) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\} \models \bot$ sprzeczność

D-d. 1) $\to$ 2). Weźmy dow. walucję π, taką, że $\pi(\varphi_1) = \ldots = \pi(\varphi_n) = \pi(\neg\psi) = 1$. ?

Jeśli $\pi(\varphi_1) = \ldots = \pi(\varphi_n) = 1$ to z (1) mamy $\pi(\psi) = 1$, więc $\pi(\neg\psi) = 0$. SPRZECZ

2) $\to$ 1) Jeśli $\pi(\varphi_1) = \ldots = \pi(\varphi_n) = 1$, to $\pi(\neg\psi) \neq 1$ więc $\pi(\neg\psi) = 0$ więc $\pi(\psi) = 1$.

(2) $\equiv$ nie ma takiej walucji że $\pi(\varphi_1) = \ldots = \pi(\varphi_n) = \pi(\neg\psi) = 1$

OBSERWACJE!

1) $\left(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi\right) \Rightarrow \left(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \alpha\} \models \psi\right)$

Zał. że $\pi(\varphi_1) = \dots = \pi(\varphi_n) = \pi(\alpha) = 1$,

wtedy $\pi(\varphi_1) = \dots = \pi(\varphi_n) = 1$

Zatem $\pi(\psi) = 1$.

Zał. że $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$

czyli jeśli $\pi(\varphi_1) = \dots = \pi(\varphi_n) = 1$

to $\pi(\psi) = 1$

Pdu. że

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \alpha\} \models \psi$

2) $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \alpha$

$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n\} \models \psi$

$|||$

$\{\varphi_1, \varphi_2, \alpha, \varphi_3, \dots, \varphi_n\} \models \psi$

Z!

P

$$\{p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to p_4\} \vdash p_4$$

$$\frac{p_1,\ p_2 \to p_2}{p_2} \quad (MP)$$

$$\frac{p_2,\ p_2 \to p_3}{p_3} \quad (MP)$$

$$\frac{p_3,\ p_3 \to p_4}{p_4} \quad (MP)$$