ZBIORY

zbiór : pojęcie pierwotne

$\in$: symbol należenia

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \quad \parallel \\ x \text{ należy do } A \end{array} \right.$$

AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚCI :

Niech A i B będą zbiorami. Jeśli dla dowolnego x mamy

$$x \in A \iff x \in B,$$

to $A = B$.

ZASADA LEIBNITZA : równe obiekty mają te same własności

wn. Jeśli $A = B$, to $x \in A \iff x \in B$ dla dow. x.

Def. Zbiorem pustym nazywamy taki zbiór C, że $\neg(x \in C)$ dla dowolnego x.

WNIOSEK. Istnieje dokładnie jeden zbiór pusty.

D-d. Załóżmy, że C_1, C_2 są zbiorami pustymi. Weźmy dowolne x. Wtedy $x \in C_1$, $x \in C_2$ są fałszywe. Zatem

$$x \in C_1 \longleftrightarrow x \in C_2 .$$

Więc z (AE) mamy $C_1 = C_2$.

OZNACZENIE: $\emptyset \leftarrow$ zbiór pusty.

Def. Sumą zbiorów A i B nazywamy taki zbiór C, że

$$x \in C \iff (x \in A \lor x \in B)$$

dla dowolnego x.

WNIOSEK. Suma zbiorów A i B jest wyznaczona jednoznacznie.

D-d. Zał. że C_1 i C_2 są sumami A i B. Weźmy dowolne x.

1) $x \in C_1 \iff (x \in A \lor x \in B)$

2) $x \in C_2 \iff (x \in A \lor x \in B)$

$(\varphi \iff \psi) \equiv (\psi \iff \varphi)$

więc

$$x \in C_1 \Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Longleftrightarrow x \in C_2.$$

Zatem, na mocy (AE), mamy $C_1 = C_2$.

OZNACZENIE: $A \cup B$ ← suma zbiorów A z B.

<u>Def.</u> <u>Przekrojem</u> A i B nazywamy zbiór C t. że

$$x \in C \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

dla dowolnego x.

WN. Przekrój jest wyzn. jednoznacznie (ZADANIE)

Oznaczenie: $A \cap B$ ← przekrój A z B

Def. **Różnica** zbiorów A i B nazywamy taki zbiór C, że

$$x \in C \Longleftrightarrow (x \in A \wedge \neg(x \in B))$$

dla każdego x.

skrót:
$x \notin B \equiv \neg(x \in B)$

Zadanie. Różn. jest wyzn. jednozn.

OZNACZENIE: $A \setminus B$ ← różnica A i B.

Def. Niech X będzie zbiorem. **Funkcją zdaniową** na zbiorze X nazywamy dowolne przyporządkowanie φ elementom x zbioru X wartości logicznej $\varphi(x)$.

{Alfabet grecki}

(P) $X = \mathbb{N}$; $\varphi(n) =$ "$2 \mid n$".

$$\varphi : \mathbb{N} \rightsquigarrow \{0, 1\}$$

(P) $X = \mathbb{R}$; $\varphi(x) =$ "$0 < x \wedge x < 1$"

__Zasada wyróżniania.__ Niech X będzie zbiorem i niech φ będzie funkcją zdaniową na X. Symbolem $\{x \in X : \varphi(x)\}$ oznaczamy taki zbiór C, że

$$x \in C \longleftrightarrow (x \in X \wedge \varphi(x)),$$

dla dowolnego x.

(P) $X = \mathbb{N}$, $\varphi(x) =$ "$2|x$"

$\{x \in \mathbb{N} : 2|x\}$ ← zbiór liczb parzystych

(P) $X = \mathbb{R}$, $\varphi(x) =$ "$0 < x \wedge x < 1$" : $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \wedge x < 1\} = (0,1)$

$\{x \in X : \varphi(x)\}$

Uwaga

$A \subseteq A$

DEF. $A \subseteq B$ jeśli dla dowolnego x mamy

$$x \in A \to x \in B.$$

Zał. że $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Weźmy dowolne x!

1) $x \in A \longrightarrow x \in B$ (bo $A \subseteq B$)

2) $x \in B \longrightarrow x \in A$ (bo $B \subseteq A$).

Zatem $x \in A \longleftrightarrow x \in B$, zatem $A = B$ (AE)

$$(AE) \equiv \big((A = B) \longleftrightarrow (A \subseteq B \land B \subseteq A)\big)$$

Def. Parą (nieuporządkowaną) elementów x, y nazywamy taki zbiór C, że

$$z \in C \Longleftrightarrow (z = x \vee z = y).$$

OZNACZENIE: $\{x, y\}$ ← para nieup. x, y.

(P) $z \in \{x, x\} \Longleftrightarrow (z = x \vee z = x) \Longleftrightarrow z = x$

$\{x\} = \{x, x\}$ ← singleton x.

(P) $z \in \{\emptyset\} \Longleftrightarrow z = \emptyset$: $\{\{\emptyset\}\} \neq \emptyset$

$\{\emptyset\} \neq \emptyset$: ¿ $\{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$?

¿ $\{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$?

$$z \in \{\{\emptyset\}\} \longleftrightarrow z \in \{\emptyset\} \longleftrightarrow z = \emptyset$$

$$\updownarrow$$

$z = \{\emptyset\}$ sprzeczność.

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \ldots$

ZADANIE: wszystkie te zbiory są parami różne !!!

Def. **Zbiorem potęgowym** zbioru X nazywamy taki zbiór C, że

$$A \in C \iff A \subseteq X,$$

dla dowolnego A.

UWAGA: (AE) $\Rightarrow$ jednoznaczność zbioru potęgowego.

OZNACZENIE: $P(X) \leftarrow$ zbiór potęgowy X

CZASEM: $P(X) \leftrightarrow 2^X$ // niechlujne

WŁASNOŚCI:

1) $\emptyset \in P(X)$

2) $X \in P(X)$.

Dd (1) $\emptyset \in P(X) \iff \emptyset \subseteq X$:

CLAIM: $\emptyset \subseteq X$.

weźmy dowolne x. Musimy pok. że

$$\boxed{\underbrace{x \in \emptyset}_{\perp} \to x \in X} \leftarrow 1$$

$\vDash \perp \to p$ $\square$

(2) $X \in P(X)$

$\Updownarrow$

$X \subseteq X$.

Uwaga: $(1) \wedge (2) \equiv$

$\{\emptyset, X\} \subseteq P(X)$.

$\mathcal{P}$ • $P(\phi) = ?$

$A \in P(\phi) \leftrightarrow A \subseteq \phi$

$\leftrightarrow A = \phi.$

$P(\phi) = \{\phi\}$

• $P(\{\phi\}) \; (= P(P(\phi))) = ?$

$A \in P(\{\phi\}) \leftrightarrow A \subseteq \{\phi\} \leftrightarrow ?$

$a \in A \rightarrow a \in \{\phi\} \leftrightarrow a = \phi$

$? \leftrightarrow (A = \phi \lor A = \{\phi\})$

$P(P(\{\phi\})) = P(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}.$

(P) $z \in \{a, b\} \cup \{c\} \Longleftrightarrow z \in \{a, b\} \vee z \in \{c\}$

$$\Longleftrightarrow (z = a \vee z = b) \vee z = c$$

$$\Longleftrightarrow z = a \vee z = b \vee z = c$$

Def

$$z \in \{a, b, c\} \Longleftrightarrow z = a \vee z = b \vee z = c$$

Def.

$$z \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Longleftrightarrow z = a_1 \vee z = a_2 \vee \dots \vee z = a_n$$

$$\Longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} (z = a_i).$$

Uwaga: $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i \overset{\text{def}}{=} \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$

$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \overset{\text{def}}{=} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$

Uwaga: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – l. rzecz.

$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

Tw (Russel) Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

Kiedyś: "paradoks Russel'a" ~1905

D-d. Zał. że jest zbiór wszystkich zbiorów.
Oznaczmy go przez V. Wtedy: jeśli X jest zbiorem to $X \in V$.

W szczególności (jak za X weźmiemy V) mielibyśmy $V \in V$.

Czyli: V – zbiór wszyst. zbiorów.

Niech

$$A = \{x \in V : \neg(x \in x)\} \quad // \text{ oper. wyróż}$$

wtedy

$$\underline{A \in A} \leftrightarrow \underbrace{A \in V}_{1} \wedge \neg(A \in A) \leftrightarrow \underline{\neg(A \in A)} \boxtimes$$

sprzeczność

$\top \wedge p \equiv p$

CO DALEJ ?

(P) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

metoda dowodzenia takich tw.

weźmy dowolne x. wtedy

$x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \cap C)$

$\leftrightarrow \dots \leftrightarrow$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

AE

wtedy z (AE) otrzymamy tezę.