Rachunek zbiorów

zgodnie z rach. zbiorów $\rightsquigarrow$ zagadn. rach. zdań

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \longleftrightarrow \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
- dopełnienie : dopełniamy do ustalonej przestrzeni.

$A, B, C \subseteq \Omega$ UWAGA : $\tilde{\Omega} = A \cup B \cup C$

$\Omega = \tilde{\Omega} \cup \{\omega\}, \ \omega \notin \tilde{\Omega}$.

np. $\omega = P(\tilde{\Omega})$.

Bo zawsze $\left.\begin{array}{l} P(X) \neq X \\ P(X) \notin X \end{array}\right\}$ Z

Def. (różnica symetryczna)

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Zadanie: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

A = zbiór słów w książce X

B = ——— " ——— Y

$A \triangle B$ = różnice między ks. X a książ Y.

$$x \in A \triangle B \equiv (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \equiv$$

$$\equiv (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (\neg x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \in A) \overset{\text{XOR}}{\oplus} (x \in B)$$

Wniosek: 1) $\triangle$ jest łączna
2) $\triangle$ jest przemienne

Obserwacje: $A, B \subseteq \Omega \longrightarrow A \triangle B, A \cap B, A \cup B \subseteq \Omega$

$A, B \in P(\Omega) \longrightarrow A \triangle B, A \cap B, A \cup B \in P(\Omega)$.

Oznaczenie: $\mathfrak{P}(\Omega) = (P(\Omega), \triangle, \cap)$

1) $(P(\Omega), \triangle)$

- $A \triangle \phi = A = \phi \triangle A$

ϕ – element neutr.

$a + (-a) = e$

- $A \triangle A = \phi$: $-A = A$

- $(P(\Omega), \triangle)$ – grupa przemienna z elem. neutr. ϕ.

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

- $(P(\Omega), \triangle, \cap)$

- $\cap$ – łączne, przemienne
- $A \in P(\Omega)$, $A \cap \Omega = A$ } Ω – jedynka (elem. neutr. dla $\cap$)

- FAKT: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$

<u>D-d</u>.
$$(A \triangle B) \cap C = ((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) \cap C$$
$$= (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) = (*)$$

$$(A \cap C) \triangle (B \cap C) = (A \cap C \cap (B \cap C)^c) \cup ((A \cap C)^c \cap B \cap C) =$$
$$(A \cap C \cap (B^c \cup C^c)) \cup ((A^c \cup C^c) \cap B \cap C) =$$
$$= (A \cap B^c \cap C) \cup \underbrace{(A \cap C \cap C^c)}_{\emptyset} \cup (A^c \cap B \cap C) \cup \underbrace{(B \cap C \cap C^c)}_{\emptyset} = (*)$$

Wniosek. $\mathcal{P}(\Omega)\ \left(=(\mathcal{P}(\Omega), \Delta, \wedge)\right)$ jest pierścieniem

przemiennym z jednością

Przykłady innych pierścieni: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $\mathbb{Z}_n = (\{0, \dots, n-1\}, \oplus_n, \odot_n)$

Uwaga: $\mathbb{Z}_2 \underset{\text{izo}}{\simeq} \mathcal{P}(\{a\})$.

Def. (para uporządkowana) [Kuratowski]

$$(x,y) \overset{def}{=\!=} \{\{x\},\{x,y\}\}$$

TW. Dla dowolnych x, y, x', y' mamy
$$(x,y) = (x',y') \equiv (x = x' \wedge y = y').$$

D-d ($\Leftarrow$) o.k.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że $(x,y) = (x',y')$. CZYLI

$$\{\{x\},\{x,y\}\} = \underbrace{\{\{x'\},\{x',y'\}\}}_{P}$$

① $(x=y)$ $\quad \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x\},\{x\}\} = \{\{x\}\}$

$$\{x\} \in \{\{x'\},\{x',y'\}\} = \{\{x\}\}$$

$$\{x'\} = \{x\}$$

$$\underline{x' = x}$$

$$\{x',y'\} \in P \equiv \{x,y'\} \in P \to \{x,y'\} \in \{\{x\}\}$$

$$\to \{x,y'\} = \{x\} \to y' \in \{x\}$$

$$\to \underline{y' = x}.$$

P2 $(x \neq y)$

$$\underbrace{\{\{x\},\{x,y\}\}}_{L} = \underbrace{\{\{x'\},\{x',y'\}\}}_{P}$$

- $\{x'\} \in L$; $\{x'\} = \{x\} \to \underline{x' = x}$.

  lub

  $\{x'\} = \{x,y\} \to x = y$

  niemożliwe

- $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x\},\{x,y'\}\}$

  $\{x,y\} \in L \to \{x,y\} \in P$

  $\to$ $\{x,y\} = \{x\} \to$ niemożliwe

  lub

  $\{x,y\} = \{x,y'\} \to y \in \{x,y'\} \to y = y'$

Def. $A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$

iloczyn kartezjański

P $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \leftarrow$ płaszczyzna

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \leftarrow$ przest. 3-wymiarowa

Uwaga: • $\times$ nie jest łączny (Z)

• $\times$ nie jest przemienny

$A \times B = B \times A \equiv (A = B) \vee (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$

• $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$. (Z)

FAKT. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

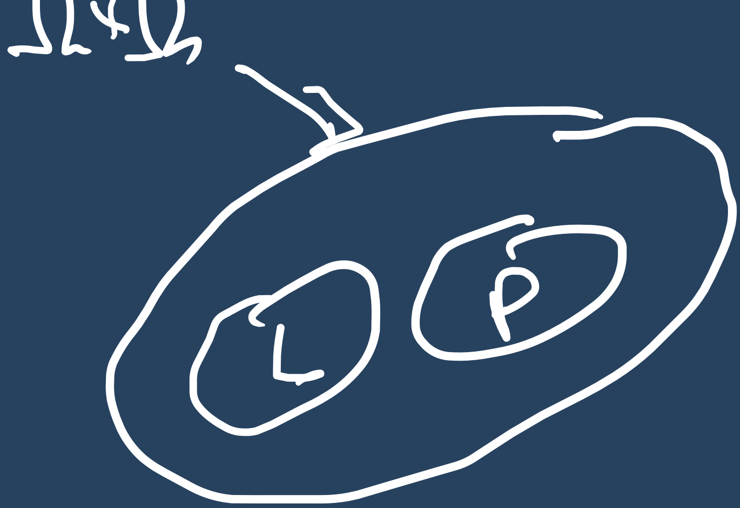
Uwaga: $A, B \subseteq \Omega \rightsquigarrow A\times B \subseteq \Omega\times\Omega$.

Uwaga: Jeśli $\Omega \supseteq A, B, C$ (np. $\Omega = A\cup B\cup C$)

to $A\times(B\cup C) \subseteq \Omega\times\Omega$

$(A\times B)\cup(A\times C) \subseteq (\Omega\times\Omega)\cup(\Omega\times\Omega) =$

$= \Omega\times\Omega.$



D-d. Rozważmy dowolną parę (x,y).

Wtedy

$$(x,y)\in A\times(B\cup C) \equiv x\in A \wedge y\in B\cup C \equiv$$

$$x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C) \overset{\models}{\equiv} (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$$

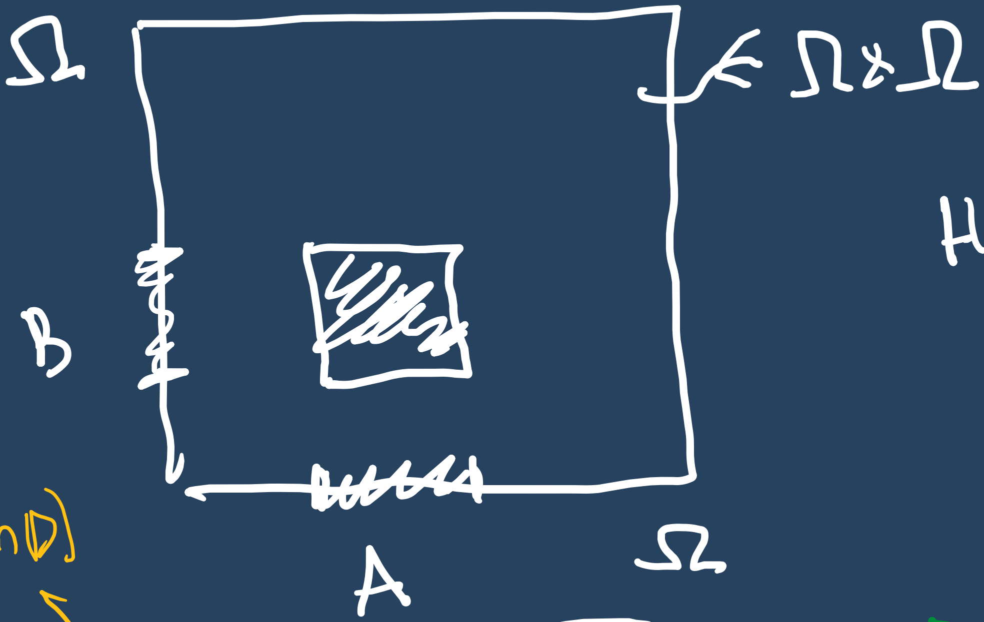
$$\equiv (x,y)\in A\times B \vee (x,y)\in A\times C \equiv$$

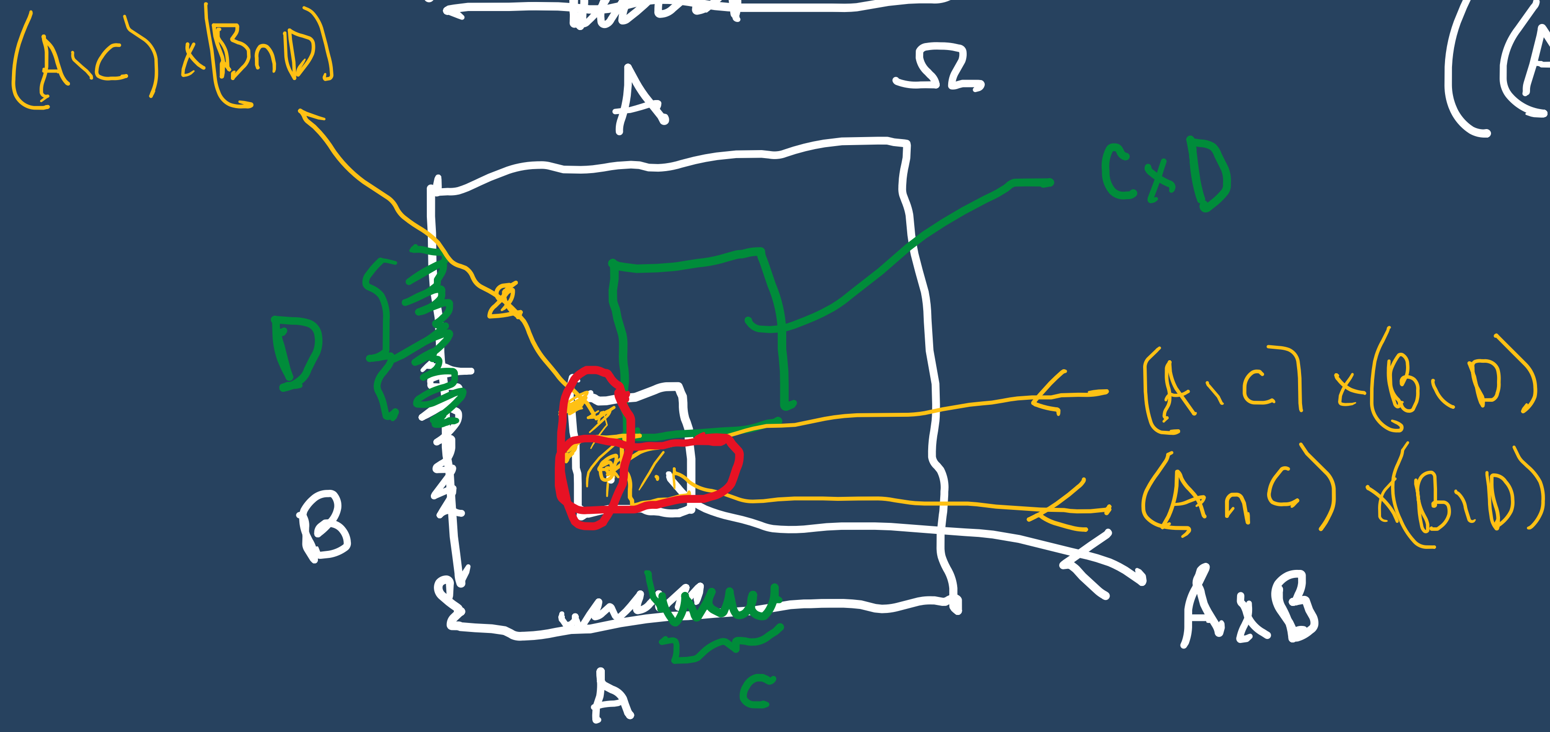
$$\equiv (x,y)\in (A\times B)\cup(A\times C)$$

$\boxtimes$

WIZUALIZACJA : $A \times B$

$A, B \subseteq \Omega$





HIPOTEZA:

$$(A\times B)\setminus(C\times D) = ?\ldots$$

$$((A\cap C^c)\times(B\cap D^c))\cup$$

$$((A\cap C^c)\times(B\cap D))\cup$$

$$(A\times C)\times(B\cap D^c)$$

Z udowodnij tę równość.

Def. $(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} ((x, y), z)$

$(x, y, z, u) \stackrel{\text{def}}{=} ((x, y, z), u)$

Ukazka: $(A \times B) \times C = \{(x, y, z) : x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$

KWANTYFIKATORY

Ustalmy przestrzeń $\Omega \neq \emptyset$.

Ustalmy funktor zdaniowy $\varphi : \Omega \to \{0, 1\}$

Def. $(\forall x)\,\varphi(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \left(\{x \in \Omega : \varphi(x)\} = \Omega\right)$

$(\exists x)\,\varphi(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \left(\{x \in \Omega : \varphi(x)\} \neq \emptyset\right)$.

Oznaczenie: $D_\varphi = \{x \in \Omega : \varphi(x)\}$ diagram funk. φ.

$(\forall x)\,\varphi(x) \equiv (D_\varphi = \Omega)$

$(\exists x)\,\varphi(x) \equiv (D_\varphi \neq \emptyset)$.

- $\varphi, \psi : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$

$\varphi \wedge \psi : \Omega \to \{0, 1\}$: $(\varphi \wedge \psi)(x) = \varphi(x) \wedge \psi(x)$

$(\varphi \vee \psi)(x) = \varphi(x) \vee \psi(x)$

$(\neg \varphi)(x) = \neg(\varphi(x))$

<u>Obserwacje</u> : $D_{\varphi \wedge \psi} = D_\varphi \cap D_\psi$

D-d. Weźmy $x \in \Omega$.

$x \in D_{\varphi \wedge \psi} = \{t \in \Omega : (\varphi \quad \psi)(t)\} \equiv (\varphi \wedge \psi)(x) = 1$

$\equiv (\varphi(x) \wedge \psi(x) = 1) \equiv \varphi(x) = 1 \wedge \psi(x) = 1$

$\equiv x \in D_\varphi \wedge x \in D_\psi \equiv x \in D_\varphi \cap D_\psi$.

czyli: $D_{\varphi\wedge\psi} = D_\varphi \cap D_\psi$

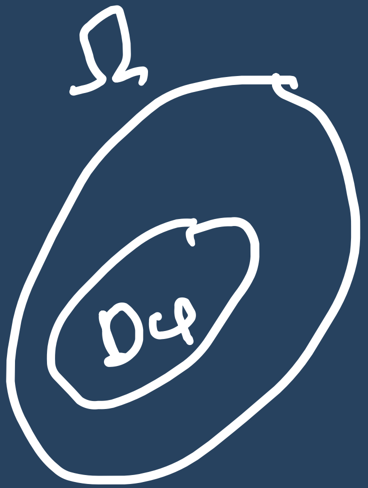
$$D_{\varphi\vee\psi} = D_\varphi \cup D_\psi$$

$$D_{\neg\varphi} = \Omega \setminus D_\varphi = D_\varphi^c \quad (\text{do } \Omega).$$

P $\quad \neg((\forall x)\varphi(x)) \equiv \neg(D_\varphi = \Omega) \equiv$

$$\equiv (D_\varphi \neq \Omega) \equiv (D_\varphi^c \neq \emptyset)$$

$$\equiv (D_{\neg\varphi} \neq \emptyset) \equiv (\exists x)\neg\varphi(x)$$



Pokaż, że

$$\neg(\forall x)\varphi(x) \equiv (\exists x)\neg\varphi(x)$$

$$\neg(\exists x)\varphi(x) \equiv (\forall x)\neg\varphi(x)$$

prawa de Morgana rach. kwant.

$\forall$ ≡ kw. ogólny, uniwers. $\bigwedge \varphi(x)$

$\exists$ ≡ kw. szcz., egzyst. $\bigvee \varphi(x)$