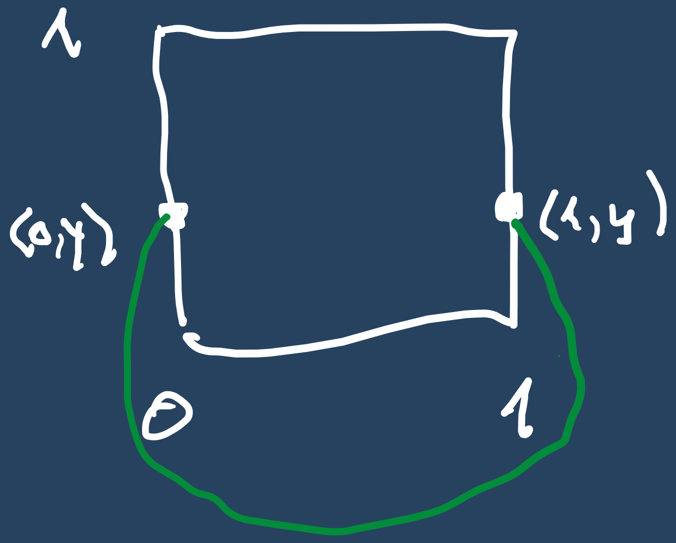
Relacje równoważności – c.d.



$K = [0,1]^2$

$(x,y) \sim (x',y') \equiv fr(x) = fr(x') \wedge (y = y')$

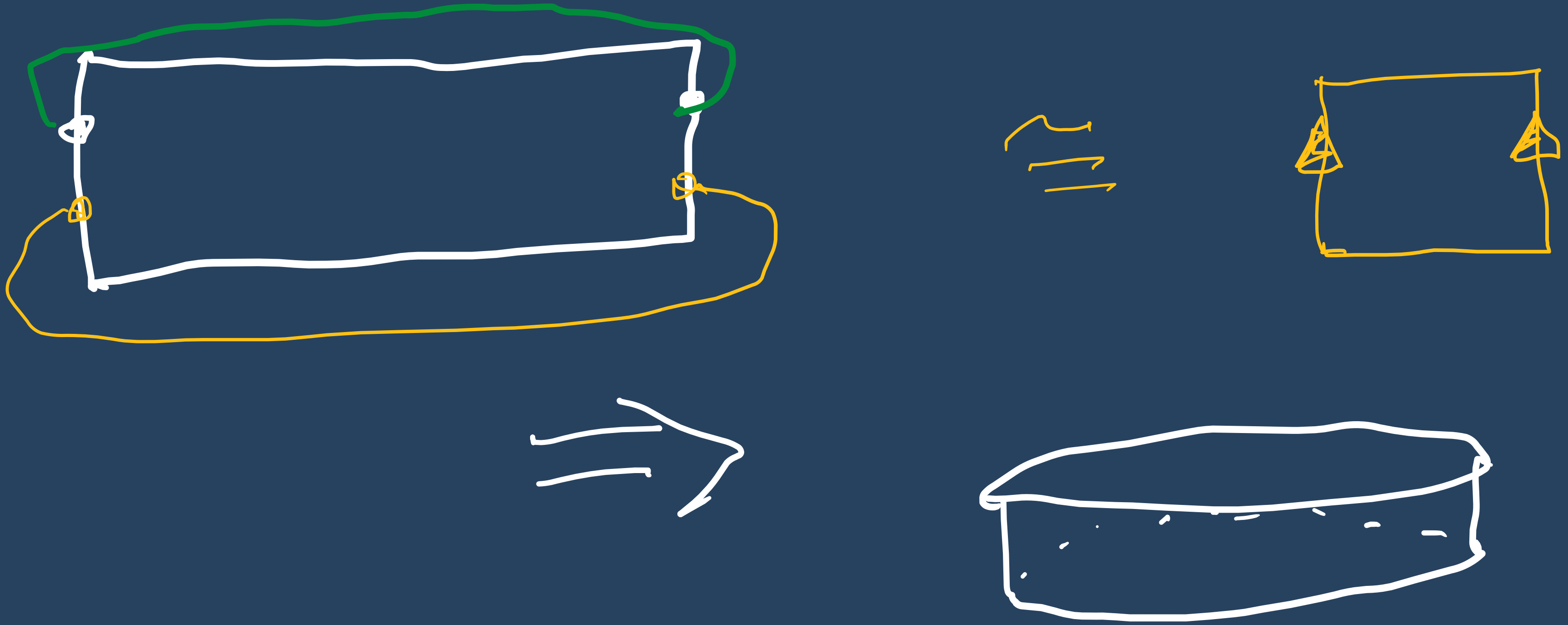
$fr(x) = x - \lfloor x \rfloor$

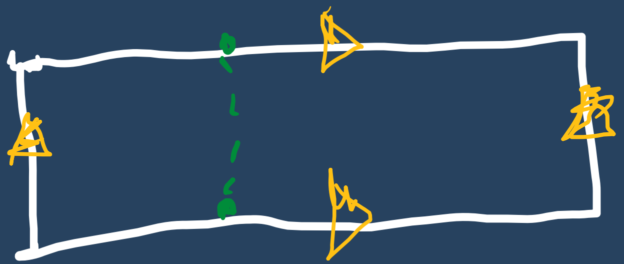
- $0 \leq x < 1 \rightarrow fr(x) = x$
- $fr(1) = 0$: $(0,y) \sim (1,y)$

- $\varphi : K \to K : (x,y) \to (fr(x), y)$

$P \sim_\varphi Q \equiv \varphi(P) = \varphi(Q) \equiv P \sim Q$

} więc to jest rel. równ.





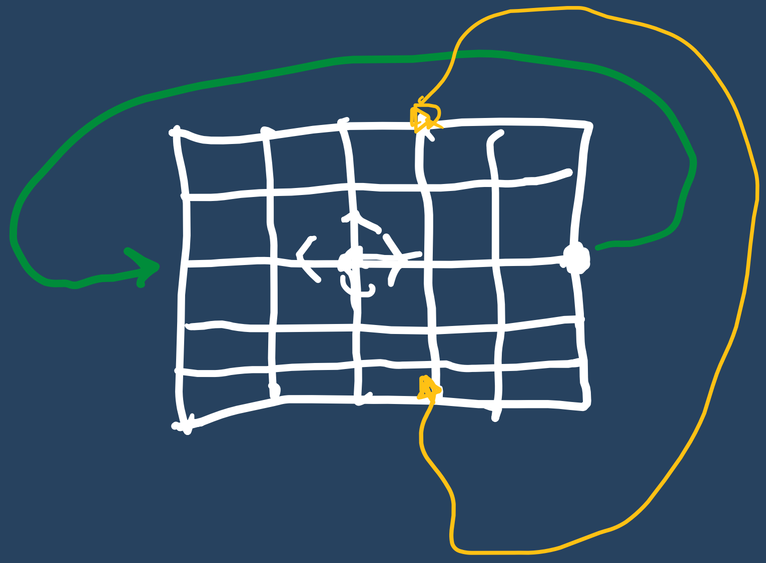
$$(x,y) \sim (x',y') \equiv$$
$$fr(x) = fr(x') \wedge fr(y) = fr(y')$$

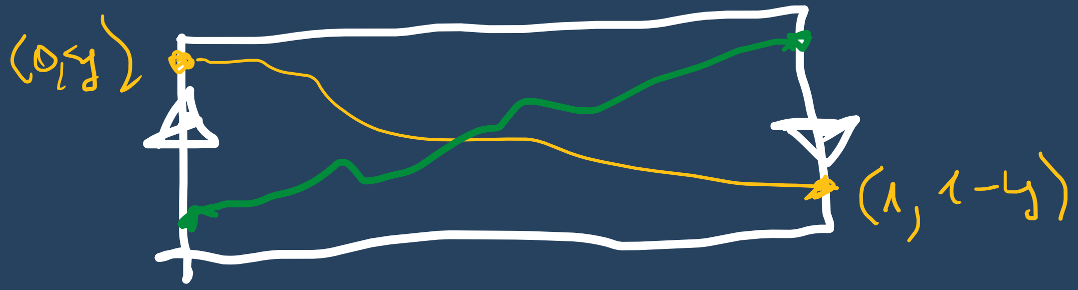
TORUS

Przykład

$$S = \{0, \dots, n-1\}^2$$

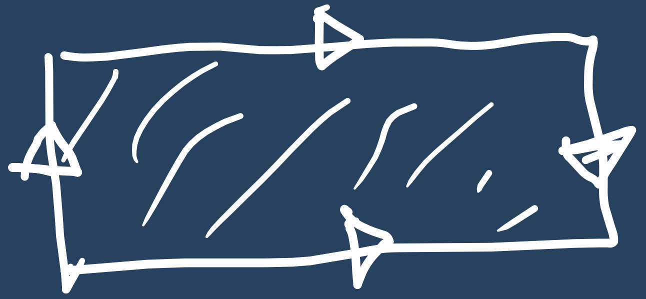
„świat gry" ≡ dyskretny torus.





wstęga Möbiusa

! powierzchnia jednostronna !



Butelka Kleina

tego nie można zrobić
w 3D ($\mathbb{R}^3$)

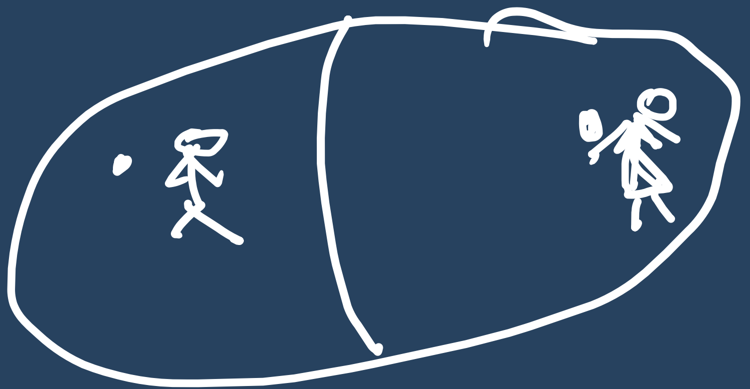
to istnieje w 4D
$\mathbb{R}^4$

PRZYKŁAD:

Z = zbiór ludzi

$x \sim y \equiv$ płeć człowieka (x) = płeć człowieka (y)

Z



$Z/\sim$ = {Kobiety, Mężczyźni}

PRZYKŁAD.

$\Omega =$ zbiór 'animals'

$\varphi(x) =$ ile nóg ma x.

$\omega \sim \eta \equiv \varphi(\omega) = \varphi(\eta)$

$[\text{pies}]_\sim = \{\text{psy, lwy, antylopy}\}$ $\quad \varphi(\omega) = 4$

$[\text{sroka}]_\sim = \{\text{ptaki, ludzie}\}$ $\quad \varphi(\omega) = 2$

$\tilde{\varphi} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \times \{0, 1\}$

$\tilde{\varphi}(\omega) = (\varphi(\omega), [\![\omega \text{ ma pióra}]\!])$

$0, 1$

$\{\omega \in \Omega : \tilde{\varphi}(\omega) = (2, 0)\} = \text{LUDZIE}.$

$\sim_{\tilde{\varphi}}$

GRUPY ILORAZOWE

Przypomnienie: na $\mathbb{Z}$ zdefiniowano

$$x \sim y \equiv 5 \mid (x-y)$$

$$\equiv x-y \in \underbrace{\{5k : k \in \mathbb{Z}\}}_{5\cdot\mathbb{Z}}$$

$$\equiv x-y \in 5\cdot\mathbb{Z}.$$

Co można powiedzieć o $5\cdot\mathbb{Z}$?

- $0 \in 5\cdot\mathbb{Z}$
- $x \in 5\cdot\mathbb{Z} \longrightarrow -x \in 5\cdot\mathbb{Z}$
- $x, y \in 5\cdot\mathbb{Z} \longrightarrow x+y \in 5\cdot\mathbb{Z}$

$5\cdot\mathbb{Z}$ jest podgrupą grupy $(\mathbb{Z}, +)$

Ustalamy grupę abelową $\mathcal{G} = (G, +)$

Ustalamy podgrupę $H \subseteq G$:

- $H \neq \emptyset$
- $x, y \in H \rightarrow x - y \in H$

[wn: • $x \in H \rightarrow x - x \in H \rightarrow 0_G \in H$

• $y \in H \rightarrow 0 - y \in H \rightarrow -y \in H$

• $x, y \in H \rightarrow x, -y \in H \rightarrow x - (-y) \in H$

$\rightarrow x + y \in H.$]

na G definiujemy $\qquad (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

$$x \sim_H y \equiv x - y \in H$$

- $x \sim_H x \equiv x - x \in H \equiv 0 \in H \equiv T$
- $x \sim_H y \equiv x - y \in H \Rightarrow -(x-y) \in H$
  $\equiv y - x \in H \Longrightarrow y \sim_H x$
- $\left.\begin{array}{l} x \sim_H y \\ y \sim_H z \end{array}\right] \equiv \begin{cases} x - y \in H \\ y - z \in H \end{cases} \Longrightarrow (x-y)+(y-z) \in H$
  $\Rightarrow x - z \in H$
  $\Leftrightarrow x \sim_H z.$

wn. $\sim_H$ rel. równ.

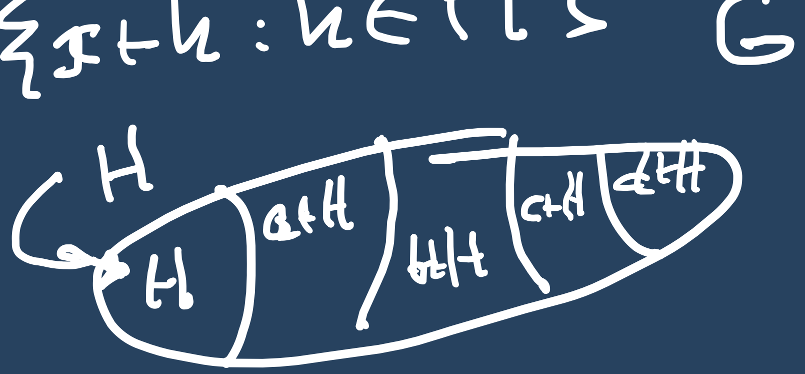
na G.

$$[x]_{\sim_H} = \{y \in G : x - y \in H\}$$
$$= \{y \in G : y - x \in H\}.$$

$$y \in [x]_{\sim_H} \equiv y - x \in H \equiv (\exists h \in H)(y - x = h)$$
$$\equiv (\exists h \in H)(y = h + x)$$
$$\equiv (\exists h \in H)(y = x + h)$$
$$\equiv y \in x + H.$$

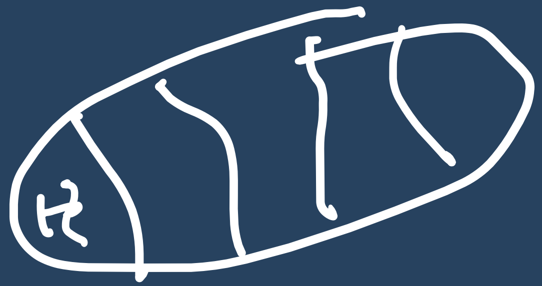
gdzie $x + H = \{x + h : h \in H\}$

$$\boxed{[x]_{\sim_H} = x + H}$$



P. $\mathbb{Z}, \sim_5$:

$$\mathbb{Z}/\sim_5 = \{5\cdot\mathbb{Z}, 1+5\cdot\mathbb{Z}, 2+5\cdot\mathbb{Z}, 3+5\cdot\mathbb{Z}, 4+5\cdot\mathbb{Z}\}.$$



CEL:

chcemy na $G/\sim_H$ określić działanie:

$$[a]_{\sim_H} \oplus [b]_{\sim_H} = [a+b]_{\sim_H}$$

$[a]_{\sim_H} = a+H$

$$[a]_\sim \oplus [b]_\sim = [a+b]_\sim \qquad (*)$$

FAKT: $\left.\begin{array}{l} a\sim a' \\ b\sim b' \end{array}\right] \Longrightarrow a+b\sim a'+b'$

[CZYLI: definicja (*) jest poprawna]

D-d. Zał. że $a\sim a'$ i $b\sim b'$. Czyli $a-a'\in H$, $b-b'\in H$.

są $\underline{\underline{h_1, h_2}}\in H$ t. że $a-a'=h_1$
$b-b'=h_2$

wtedy $\quad a = a' + h_1$
$\qquad\qquad b = b' + h_2.$

CEL: chcemy pok. że $a+b \sim a'+b'.$

$$(a+b)\sim(a'+b') \equiv (a+b)-(a'+b')\in H$$
$$\equiv (a-a')+(b-b')\in H \equiv h_1+h_2\in H \equiv T$$

$\boxtimes$

CZYLI: $\quad [a]_\sim \oplus [b]_\sim = [a+b]_\sim$

JEST POPRAWNE.

MAMY STRUKTURĘ $(G/\sim_H, \oplus)$

- $[a]_\sim \oplus [0]_\sim = [a+0]_\sim = [a]$

  czyli: $[0]_\sim$ $(=H)$ jest elem. neutralnym

- $[a]_\sim \oplus [-a]_\sim =$

  $= [a+(-a)]_\sim = [0]_\sim$

  mamy elem. przeciwne

  $-[a]_\sim = [-a]_\sim$.

- $[a]_\sim \oplus ([b] \oplus [c]) = [a] \oplus [b+c] =$

  $= [a+(b+c)] = [(a+b)+c] = \ldots =$

  $([a]_\sim \oplus [b]_\sim) \oplus [c]$ łączność.

WNIOSEK: $(G/\sim_H, \oplus)$ jest grupą.

OZNACZENIE: $G/H = (G/\sim_H, \oplus)$

grupa ilorazowa.

[algebra: dzielnik normalny]

(P) $\mathbb{Z}/(5\cdot\mathbb{Z}) \underset{120}{\cong} C_5$ $(=(\{0,1,2,3,4\}, \oplus_5))$

dod. modulo 5

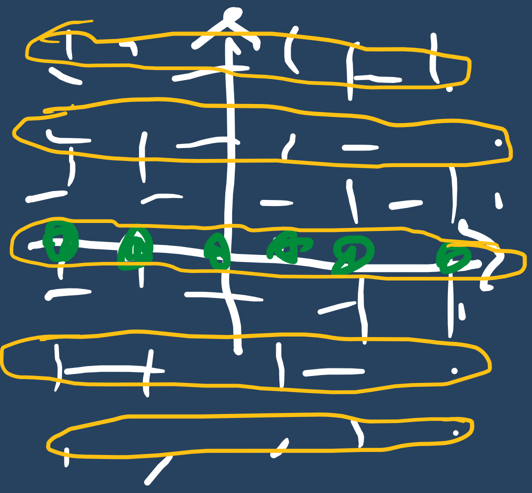
ogólniej

$$\boxed{C_k = \mathbb{Z}/(k\cdot\mathbb{Z})}$$

P

$$G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$



$$H = \mathbb{Z} \times \{0\} \quad \left(= \{(x,0) : x \in \mathbb{Z}\} \right)$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / H \simeq \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}^2 / \sim_H = \{[(0,y)] : y \in \mathbb{Z}\} .$$

$$\widetilde{H} = (5 \cdot \mathbb{Z}) \times (3 \cdot \mathbb{Z})$$

Z $\quad \mathbb{Z}^2 / \widetilde{H} \cong \mathbb{C}_5 \times \mathbb{C}_3$

Ⓟ $G = \mathbb{C}_{12} \simeq (\{0, 1, \ldots, 11\}, \oplus_{12})$

$$H = \{0, 4, 8\} \triangleleft \mathbb{C}_{12}.$$

$$\mathbb{C}_{12}/\sim_H = \left\{ \underbrace{\{0,4,8\}}_{H}, \underbrace{\{1,5,9\}}_{1+H}, \{2,6,10\}, \underbrace{\{3,7,11\}}_{3+H} \right\}$$

$2+H$

$4+H = \{4, 8, 0\} = H.$

$\cancel{\mathbb{C}_{12}/\sim_H}$

$$\mathbb{C}_{12}/H \overset{\text{izo}}{\simeq} \mathbb{C}_4$$

(P) $\mathbb{Z}/(k\cdot\mathbb{Z}) \underset{120}{\cong} C_k$

DOJRZAŁA "INTELEKTUALNIE"

DEFINICJA :

$$C_k \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}/(k\cdot\mathbb{Z})$$

$\mathbb{Z}_k \cong (\mathbb{Z},+,\cdot)/(k\mathbb{Z})$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$$

$\blacksquare$