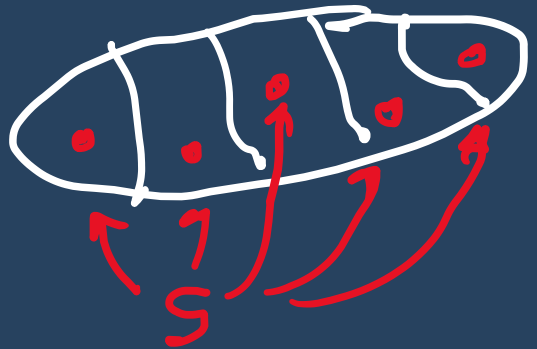
Selektory rozbić



mamy zbiór X.

mamy rozbicie $\mathcal{P}$ zbioru X:

1) $\mathcal{P} \subseteq P(X) \setminus \{\emptyset\}$
2) $\bigcup \mathcal{P} = X$
3) $(\forall A, B \in \mathcal{P})(A \neq B \to A \cap B = \emptyset)$

Selektor: S jest selektorem $\mathcal{P}$, jeśli $S \subseteq X$ i

$$(\forall A \in \mathcal{P})(|S \cap A| = 1)$$

(P) na $\mathbb{R}$ definiujemy

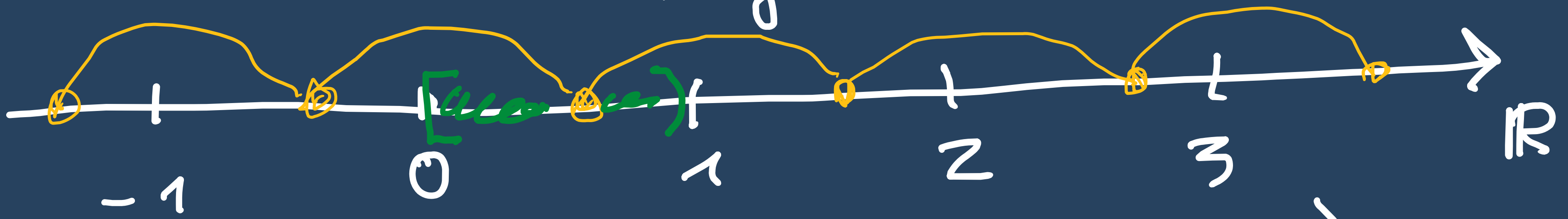
$$x \sim y \equiv x - y \in \mathbb{Z}$$

[$(\mathbb{R}, +)$ - grupa ; $\mathbb{Z}$ - podgrupa $(\mathbb{R}, +)$]

$$x \sim y \equiv x - y \in \mathbb{Z} \equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(x - y = k)$$

$$\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(x = y + k)$$

$$\equiv (\exists k \in \mathbb{Z})(y = x + k).$$



FAKT: $x \sim fr(x) \quad (= x - \lfloor x \rfloor)$

D-d. $x = (x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor$

$= fr(x) + \lfloor x \rfloor.$

WNIOSEK: $[0,1)$ jest selektorem $\sim$

$[\alpha, \beta \in [0,1), \alpha \neq \beta \to \neg(\alpha \sim \beta)]$

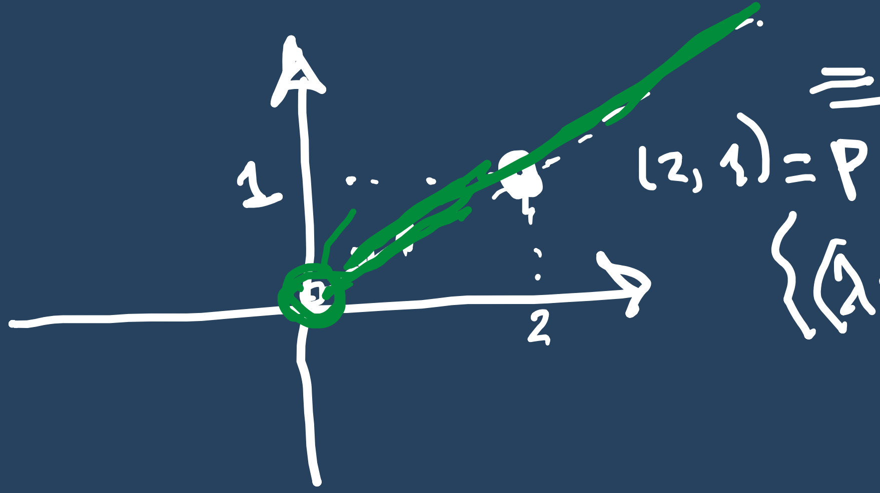
$$\mathbb{R}/\sim \; = \{[\alpha]_\sim : \alpha \in [0,1)\}$$

uwaga: $x \oplus y = \mathrm{fr}(x+y) \quad (= (x+y) \bmod 1)$

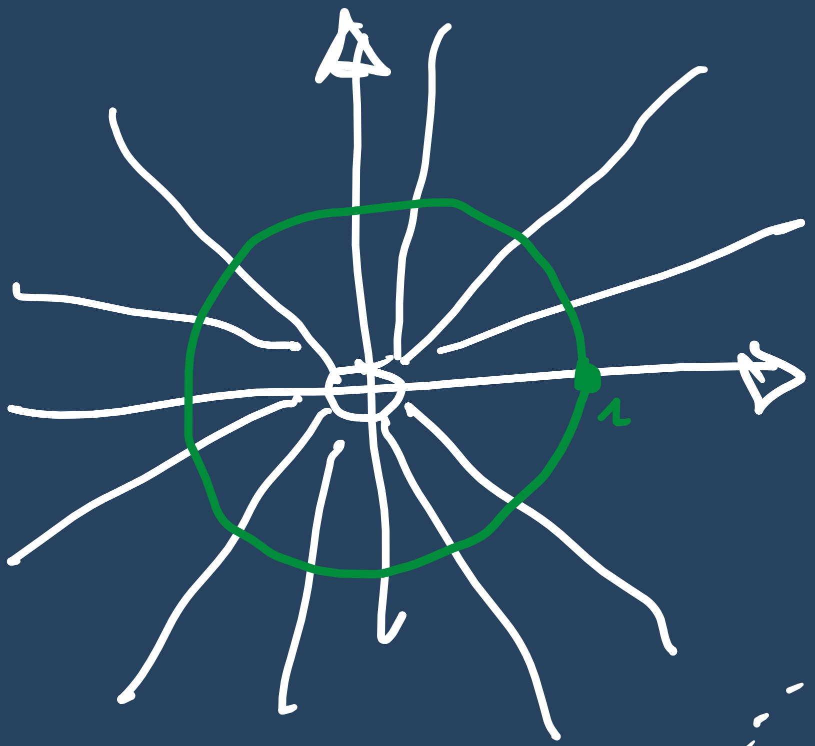
$$([0,1), \oplus) \underset{\text{izo}}{\simeq} (\mathbb{R},+)/\mathbb{Z}.$$

(P) $X = \mathbb{R}^2$. $\quad (x,y) \sim (x',y') \equiv (\exists \lambda > 0)((x,y) = \lambda(x',y'))$

$$\equiv (\exists \lambda > 0)((x,y) = (\lambda x', \lambda y'))$$



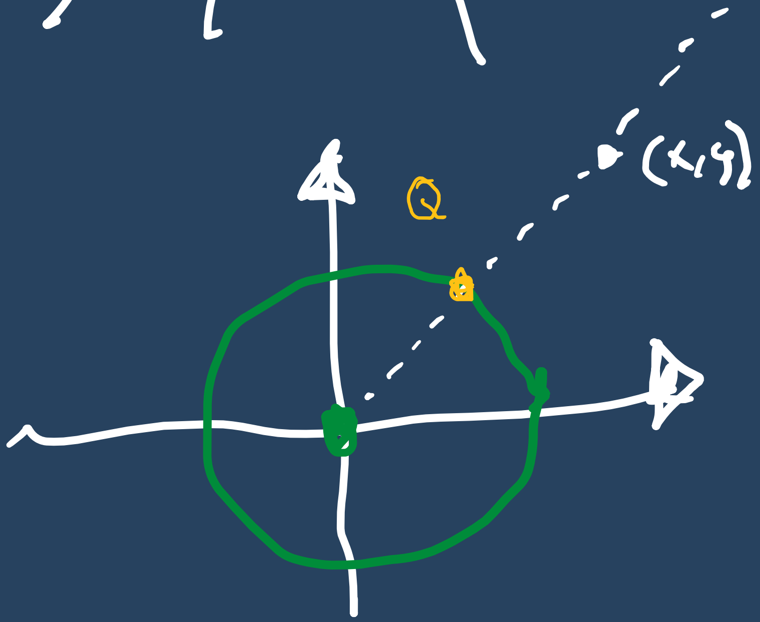
$$\{(\lambda \cdot 2, \lambda \cdot 1) : \lambda > 0\}$$



$[(0,0)] = \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2/\sim$ = wszystkie półproste zaczyn. się od $(0,0)$ bez $(0,0)$ $\cup \{(0,0)\}$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \cup \{(0,0)\}$



- $P, Q \in S$, $P \neq Q$ $\rightarrow \neg(P \sim Q)$
- $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

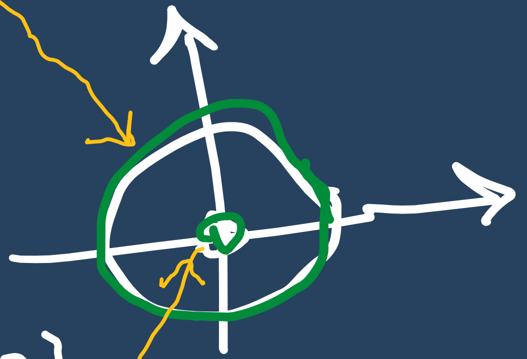
$(x', y') = \frac{1}{r}(x,y)$

$$(x',y') = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right).$$

CLAIM : $(x',y') \in S$

$$(x')^2+(y')^2 = \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

$$\mathbb{R}^2/\sim \;\simeq\; \underbrace{\{[p] : p \in S\}}_{\text{kierunki}} \cup \{\{(0,0)\}\}$$



UWAGA: nie zawsze da to się "fajnie" zrobić

(P) na $\mathbb{R}$ rozważamy relację

$$x \sim y \equiv x - y \in \mathbb{Q}.$$

FAKT: każdy selektor S tej relacji jest patologicznym zbiorem.

[selektor $\sim$ = zbiór Hamela]

CZĘŚCIOWE PORZĄDKI

<u>Def</u>. Relację $R \subseteq X \times X$ jest częściowym porządkiem na X jeśli

1) R jest <u>zwrotna</u> na X // $(\forall x \in X)\ (x,x) \in R$
2) R jest <u>przechodnia</u> // $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$
3) R jest <u>słabo antysymetryczna</u>

$(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \longrightarrow x = y$.

(P) $X = \mathbb{R}$

$\leq \; = \{(x,y) \in \mathbb{R} : (\exists t \in \mathbb{R})\,(y = x + t^2)\}$

(Z)

(P) Ustalmy X.

Niech $Y = P(X)$. Dla $A, B \in Y$

$$A \leq B \equiv A \subseteq B$$

- $A \leq A \quad (A \subseteq A)$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \to A = B$ cf. (antys)
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C$.

(P) Na $\mathbb{N}^+ \; (= \mathbb{N} \setminus \{0\})$:

$$x \leq y \equiv x \mid y \quad \left[(\exists k \in \mathbb{N})(y = k \cdot x) \right]$$

Terminologia: $(X, \leq)$ – częściowy porządek

$\leq$ – częściowy porządek na X.

[POS – partially ordered set]

(P) $(P(\{a,b\}), \subseteq)$

$\emptyset \subseteq \{a\} \subseteq \{a,b\}$

$\subseteq \{b\}$

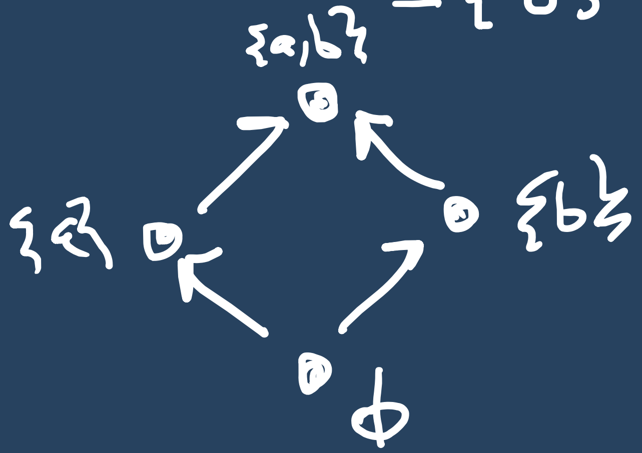
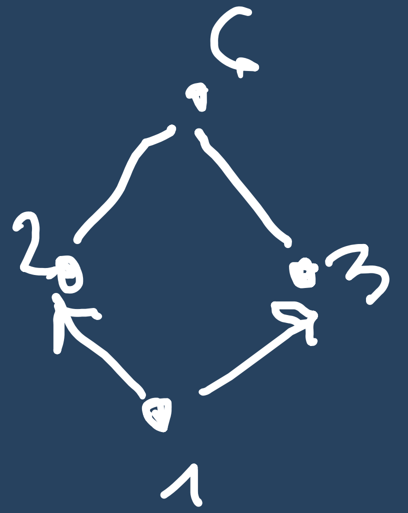
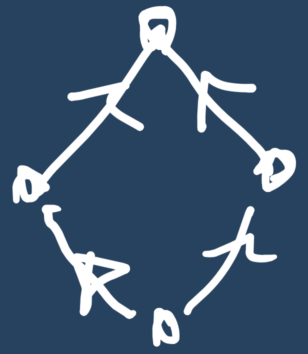


diagram Hassego cz. porz.

$(\{1,2,3,6\}, |)$

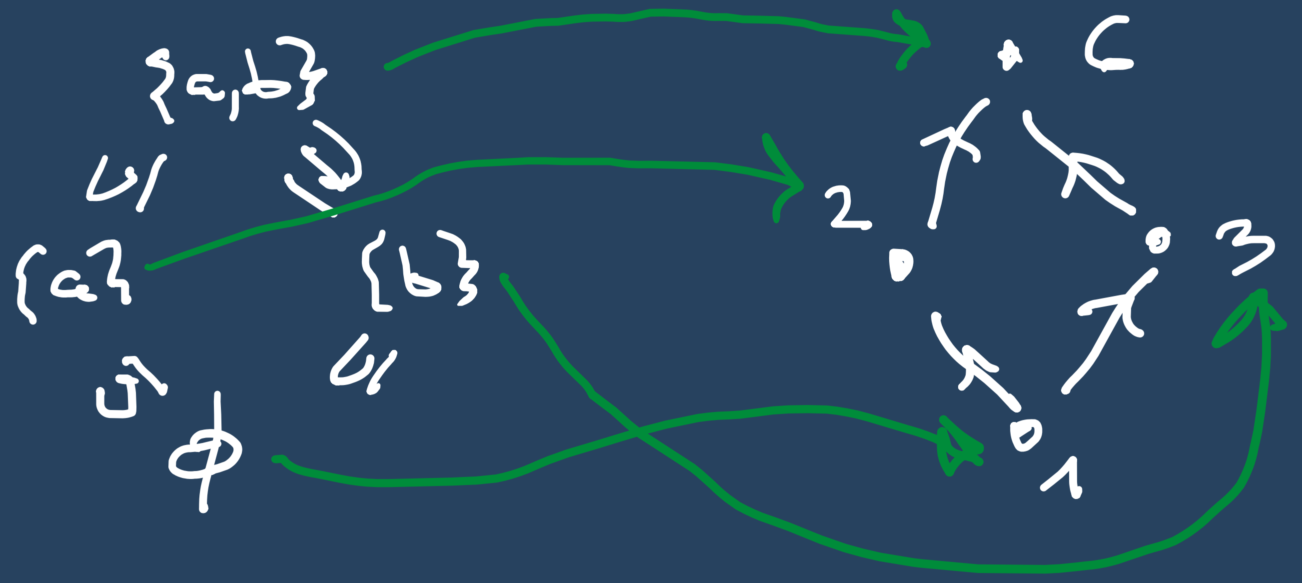
$a | b \equiv (\exists n \in \mathbb{N})\ b = a \cdot n$





Def. $(X, \leq) \underset{\text{izo}}{\cong} (Y, \preceq)$ jeśli

$(\exists f: X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} Y)(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \leq x_2 \leftrightarrow f(x_1) \preceq f(x_2))$



$$f = \{(\{a,b\},6),(\{a\},2),(\{b\},3),(\emptyset,1)\}$$

$$f:(P(\{a,b\}),\subseteq)\xrightarrow[\text{IZO}]{}(\{1,2,3,6\},\mid)$$

<u>Def</u>. Niech $(X, \leq)$ będzie cz. porz. i niech $a \in X$.

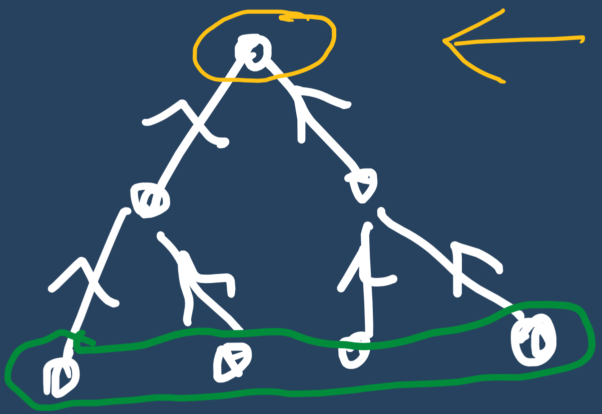
(1) a jest $\leq$-maks. $\equiv (\forall x \in X)(a \leq x \to a = x)$

(2) a jest $\leq$-największy $\equiv (\forall x \in X)(x \leq a)$

(3) a jest $\leq$-minimalny $\equiv (\forall x \in X)(x \leq a \to x = a)$

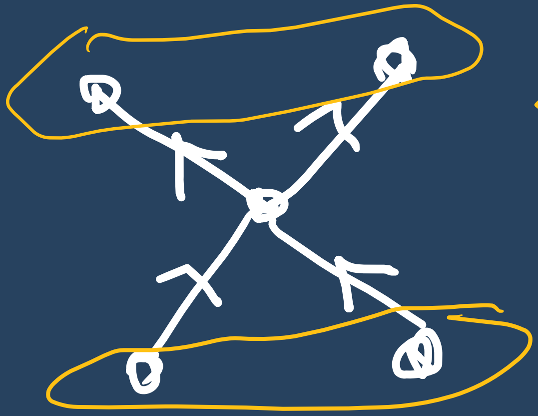
(4) a jest $\leq$-najmniejszy $\equiv (\forall x \in X)(a \leq x)$

P



← element maxim.

← elem. minimale



← maximale

← minimale.

F1. Jeśli a, b są największe to $a = b$.

D-d. Zał. że a, b są najw.

- $(\forall x \in X)(x \leq a)$ (1)
- $(\forall x \in X)(x \leq b)$ (2)

Zatem
- z (1) wynika, że $b \leq a$
- z (2) wynika, że $a \leq b$.

Ze słabej antysymetrii mamy $a = b$.

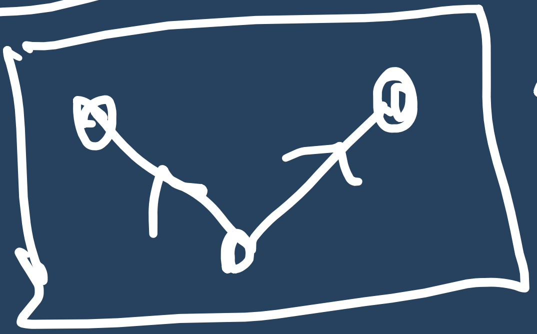
F2. Jeśli a jest największy to a jest maksymalny.

Dd. Zał. że $(\forall x \in X)(x \leq a)$.

Zał. że $x_0 \in X$ oraz $a \leq x_0$.

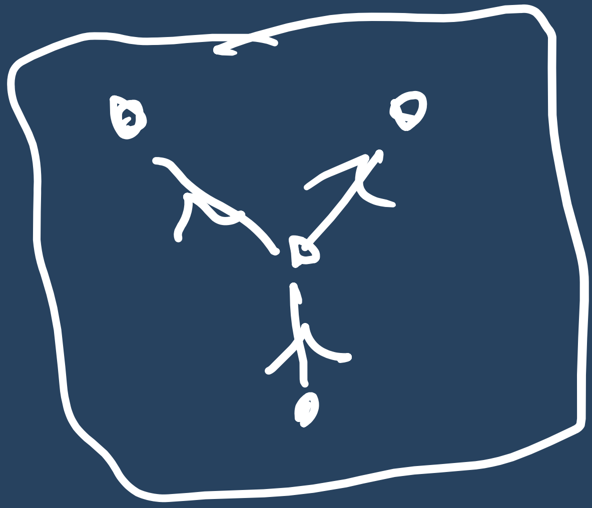
Ale z zał. mamy $x_0 \leq a$.

Ze słabej anty-sym mamy $x_0 = a$. $\square$

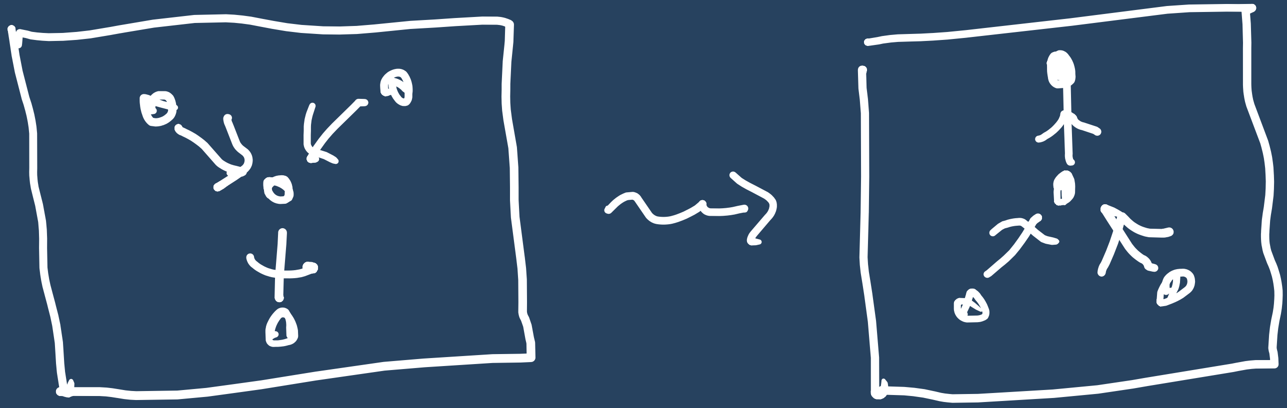


← maks. $\wedge$ $\neg$największe.

F3. Jeśli $(X, \leq)$ jest cz. porz. to $(X, \leq^{-1})$ jest też cz. porządkiem



$(X, \leq)$



$(X, \leq^{-1})$

- $x \leq^{-1} x \equiv (x,x) \in \leq^{-1} \equiv (x,x) \in \leq \equiv T$
- $x \leq^{-1} y \wedge y \leq^{-1} x \equiv (x,y) \in \leq^{-1} \wedge (y,x) \in \leq^{-1}$

  $\equiv (y,x) \in \leq \wedge (x,y) \in \leq \Rightarrow x = y$
- przech.: zadanie.

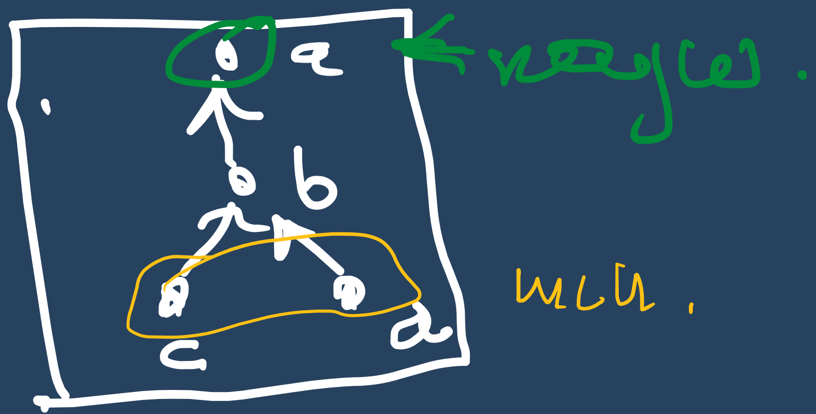
F4. - $(X, \leq)$ - cz. porz.,

$a \in X$. wtedy

1) a jest $\leq$-najw. $\equiv$ a jest $\leq^{-1}$-najm.

2) a jest $\leq$-maks. $\equiv$ a jest $\leq^{-1}$-minim.

$(X, \geq)$



<u>D-d</u>. a jest $\leq$-największy

$$\Updownarrow$$

$$(\forall x \in X)(x \leq a)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall x \in X)(a \leq^{-1} x)$$

$$\Updownarrow$$

a jest $\leq^{-1}$ najmn.

$$x \leq a$$

$$\Updownarrow$$

$$(x, a) \in \, \leq$$

$$\Updownarrow$$

$$(a, x) \in \, \leq^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$a \leq^{-1} x$$

FAKT. Załóżmy, że $(X, \leq)$ jest cz. por.
Niech $Y \subseteq X$. Wtedy

$$(Y, \leq \cap Y^2)$$

też jest cz. uporządkowan.

D-d. zwrotność:

$\leq$ - zw. na X; $(\forall x \in X)((x,x) \in \leq)$

zatem $(\forall x \in Y)((x,x) \in \leq)$,

zatem $\leq \cap Y^2$ jest zwrotna

2) sł. antys.

$$(\forall x,y\in X)\big((x,y)\in\leq \wedge (y,x)\in\leq \longrightarrow x=y\big)$$

zatem

$$(\forall x,y\in Y)\big(\underline{\qquad\qquad} \wedge \underline{\qquad\qquad}\big)$$

więc $\leq\cap Y^2$ jest sł. antysym.

3) przechodn.

$$(\forall x,y,z\in X)\big((x,y)\in\leq \wedge (y,z)\in\leq \longrightarrow (x,z)\in\leq\big)$$

zatem

$$(\forall x,y,z\in Y)\big(\underline{\qquad\qquad} \wedge \underline{\qquad\qquad}\big)$$

więc $\leq\cap Y^3$ jest przechodnia.

(P) Na $\mathbb{R}$ mamy relację naturalnego porządku $\leq$. To jest cz. porz.

- $(\mathbb{Q}, \leq \cap \mathbb{Q}^2)$ – to jest cz. porz,
- $(\mathbb{N}, \leq \cap \mathbb{N}^2)$ – – " ——— .