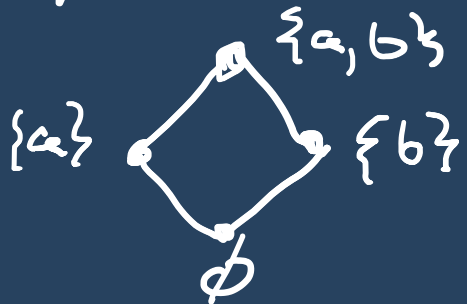
(P1) $(\mathbb{R}, \leq)$: tutaj nie mamy elementów min, max, najw. - najm.

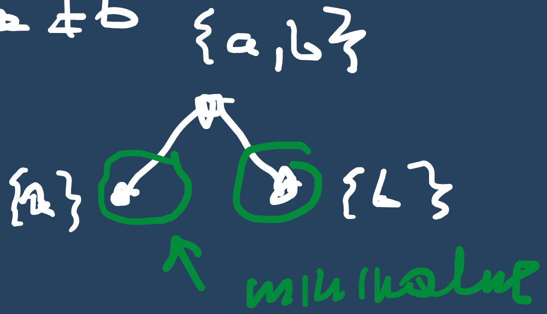
(P2) $\mathcal{P}(\Omega) = (P(\Omega), \subseteq)$: $\emptyset$ - najmniejszy

Ω - najw.

$\mathcal{P}^+(\Omega) = (P(\Omega) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$

np. $\Omega = \{a, b\}$, $a \neq b$





elementy minimalne w $\mathcal{P}^+(\Omega)$: zbiory postaci $\{a\}$, dla $a \in \Omega$. $(\Omega \neq \emptyset)$

(P3) $\mathcal{N} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ $\quad a | b \equiv (\exists k \in \mathbb{N})(b = k \cdot a)$

$\mathcal{N}^* = (\mathbb{N} \setminus \{0,1\}, |)$:

elem. minimalne w $\mathcal{N}^*$ $\equiv$ (Z)

liczby pierwsze

PRODUKT CZ. PORZĄDKÓW.

$\mathcal{X} = (X, \leq_1)$, $\mathcal{Y} = (Y, \leq_2)$ – cz. porz.

na $X \times Y$ określamy relację:

$$(x,y) \leq (x',y') \equiv (x \leq_1 x') \wedge (y \leq_2 y')$$

FAKT: $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = (X \times Y, \leq)$ jest cz. porządkiem.

D-d: 1) $(x,y) \leqslant (x,y) \equiv (x \leqslant_1 x) \wedge (y \leqslant_2 y) \equiv T$

2) $\left.\begin{array}{l}(x,y) \leqslant (x',y') \\ (x',y') \leqslant (x,y)\end{array}\right] \equiv \left(\begin{array}{l}(x \leqslant_1 x') \wedge (y \leqslant_2 y') \wedge \\ (x' \leqslant_1 x) \wedge (y' \leqslant_2 y)\end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = x' \wedge y = y' \equiv (x,y) = (x',y')$

3) przechodność: zadanie.

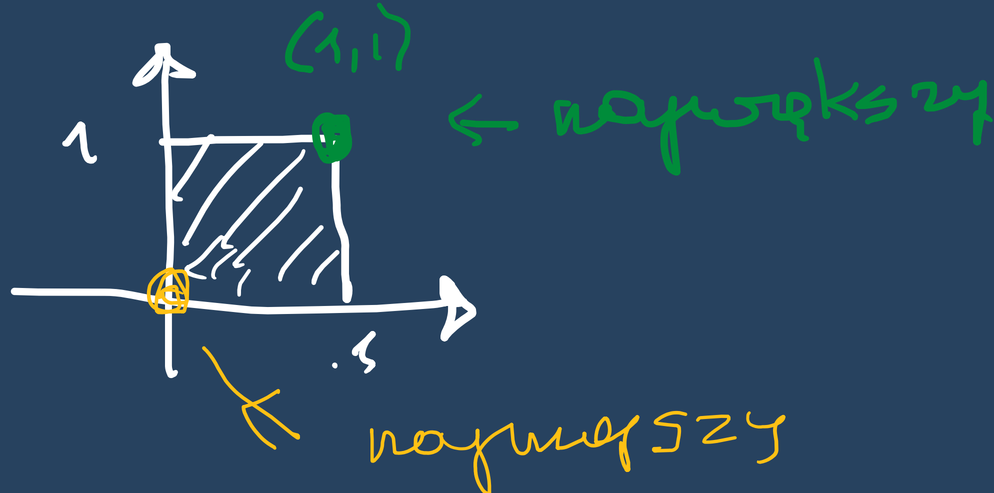
P $\quad X = Y = \mathbb{R}, \quad \leq_1 = \leq_2 = \leq$

$$(x,y) \leq (x',y') \equiv (x \leq x') \wedge (y \leq y')$$

$$U_{(a,b)} = \{(x,y) : (a,b) \leq (x,y)\}$$
$$= [a,\infty) \times [b,\infty)$$

(0,1), (1,0) są nieporównywalne w sensie $\leq$

P1 $K = [0,1]^2$ $\quad (K, \leq)$ $\quad \leq$ - cz. porz. produkt

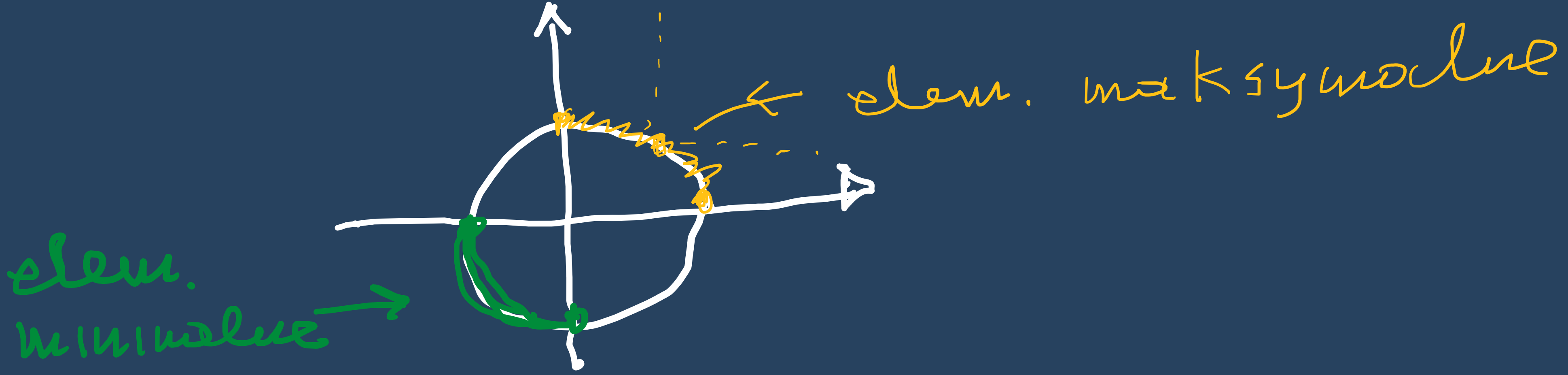


$(x,y) \in K$

$\Downarrow$

$(x,y) \leq (1,1) \in K$

P2 $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$



Uniwersalność cz. porz. postaci $\mathcal{P}(\Omega)$.

$(X, \leq)$ – cz. porz.

Dla $x \in X$ definiujemy

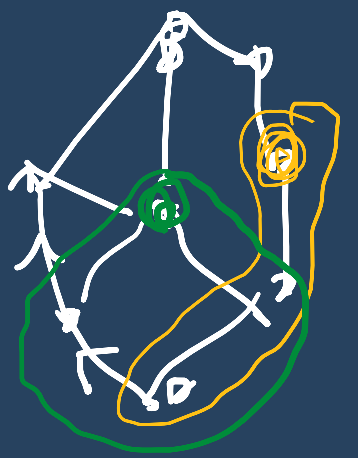
$$\varphi(x) = \{y \in X : y \leq x\}$$

- $\varphi : X \longrightarrow P(X)$
- $x \leq y \longrightarrow \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$

D-d. Wiemy, że $x \leq y$. $(a \in X)$

$$a \in \varphi(x) \equiv a \leq x \underset{\text{przech}}{\Longrightarrow} a \leq y \equiv a \in \varphi(y)$$

Uwaga: $x \in \varphi(x)$ dla $x \in X$



- φ jest 1-1.

  Zał. że $x, y \in X$ i $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Wtedy $x \in \varphi(x) \wedge \varphi(x) = \varphi(y) \rightarrow x \in \varphi(y)$

$\rightarrow x \leq y$

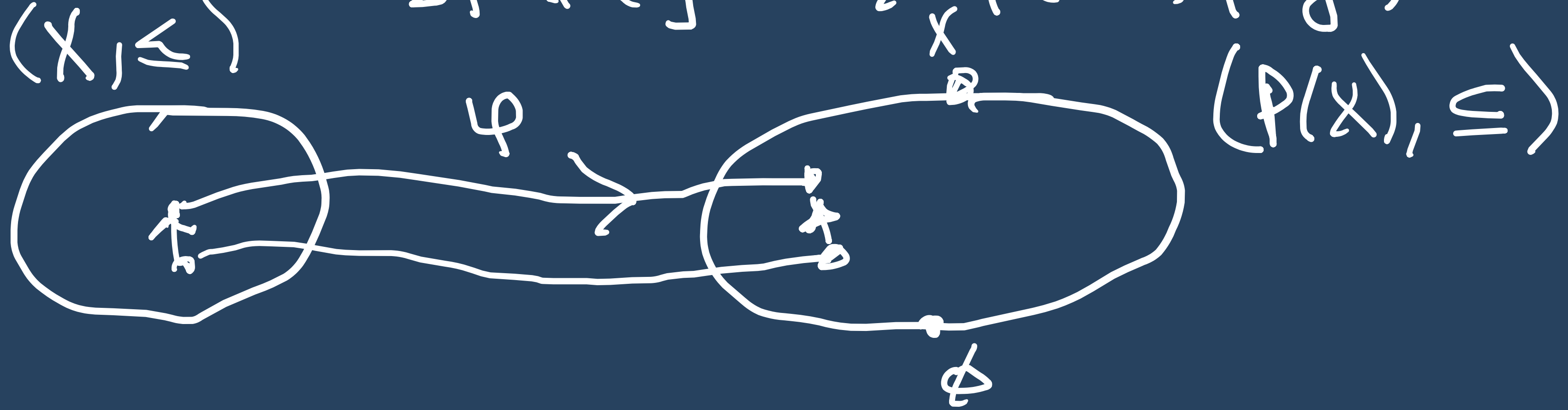
Podobnie

$y \in \varphi(y) \wedge \varphi(y) = \varphi(x) \rightarrow y \in \varphi(x) \rightarrow y \leq x$.

CZYLI

1) $\varphi : X \xrightarrow{1-1} P(X)$

2) $x \leq y \rightarrow \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$



Zatem

$$(X, \leq) \cong_{IZO} \mathcal{P}(X) \restriction rng(\varphi)$$

$X, \leq$

$\mathcal{P}(X)$

UWAGA!

$$f: X \xrightarrow{1-1} Y$$

$$\Downarrow$$

$$f: X \xrightarrow[na]{1-1} rng(f)$$

UWAGA: Co jest najmn. cz. porz na X ?

ODP: Jest to $I = \{(x,x) : x \in X\}$.

(P) $X = \{a,b,c\}$

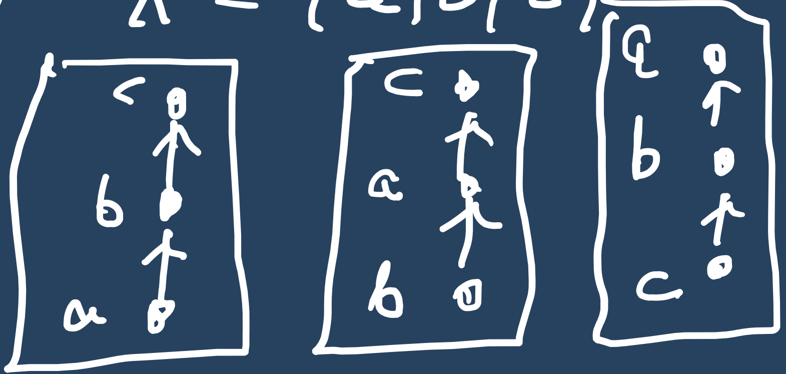
$I_{\{a,b,c\}}$ diagram Hassego.

LINIOWE PORZĄDKI

Def. Częściowy porządek $(L, \leq)$ jest liniowym porządkiem, jeśli

$$\boxed{(\forall x, y \in L)\,(x \leq y \vee y \leq x)}.$$

(P) $X = \{a, b, c\}$



. . . .

mamy 6 lin. por. na $\{a, b, c\}$

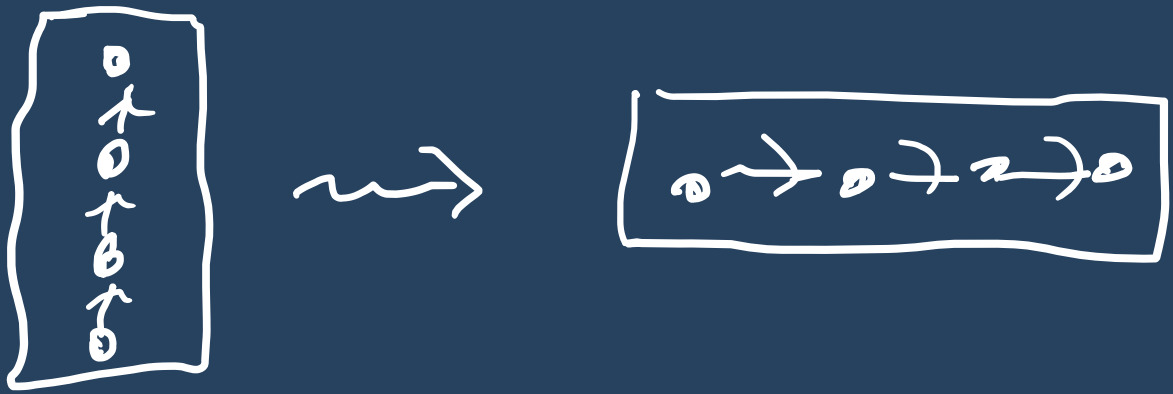
$6 = |\{a, b, c\}|!$

(P) $(\mathbb{R}, \leq)$ – l. porządek

WNIOSEK. Jeśli $(X, \leq)$ jest lin. porz. i $Y \subseteq X$, to $(Y, \leq\restriction Y)$ też jest liniowym porządkiem, gdzie $\leq\restriction Y = \leq \cap (Y \times Y)$.

(P): $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ — to są lin. porządki.

(U)



PORZĄDEK LEKSYKOGRAFICZNY

$(L_1, \leq_1)$, $(L_2, \leq_2)$ – lin. porządki

produkt leksykograficzny:

na $L_1 \times L_2$:

$$\big((x,y) \preceq (x',y')\big) \equiv (x <_1 x') \vee (x = x' \wedge y \leq_2 y')$$

gdzie $x <_1 x' \equiv (x \leq_1 x' \wedge x \neq x')$.

Fakt $\preccurlyeq$ jest lin. porządkiem.

D-d. $\preccurlyeq$ - jest cz. porządkiem (ZADANIE)

Weźmy (x,y) i (x',y') z $L_1 \times L_2$.

1. Porównujemy x z x'.

P1 $x < x'$: ok $((x,y) \preccurlyeq (x',y'))$

P2 $x = x'$

P21 $y \leq y'$: ok $((x,y) \preccurlyeq (x',y'))$

P22 $y' \leq y$: ok $((x',y') \preccurlyeq (x,y))$

P3 $x' < x$: ok $(x',y') \preccurlyeq (x,y)$.

(P) $A = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$ ((ASCII))

$a < b < \ldots < z$

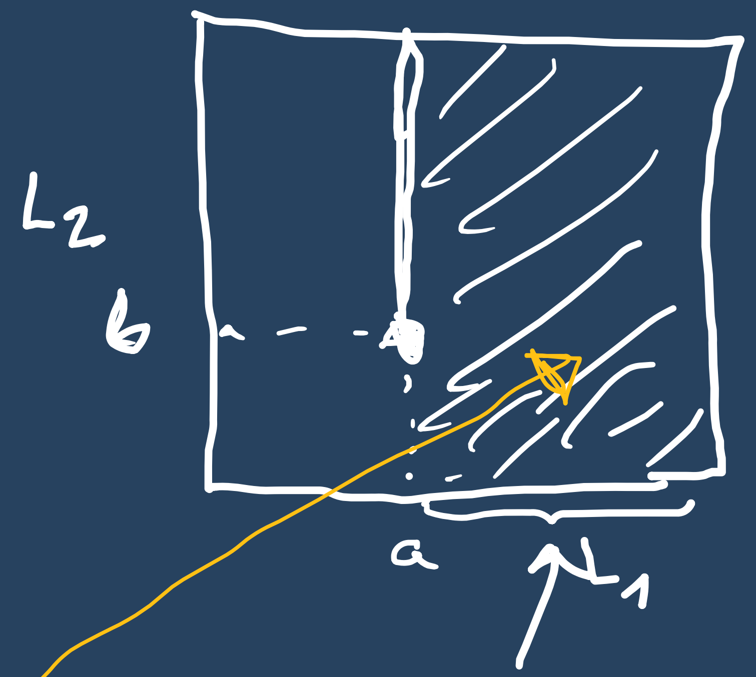
$A \times A$ rozw. produkt kartezj.

$(a,a) < (a,b) < (a,c) < \ldots < (a,z) < (b,a) < (b,b) < \ldots$

$aa < ab < ac < \ldots < az < ba < bb < \ldots$

porządek słownikowy dla słów długości 2

$(L_1, \leq_1)$ $(L_2, \leq_2)$ – l. porz.



$(a,b) \in L_1 \times L_2$

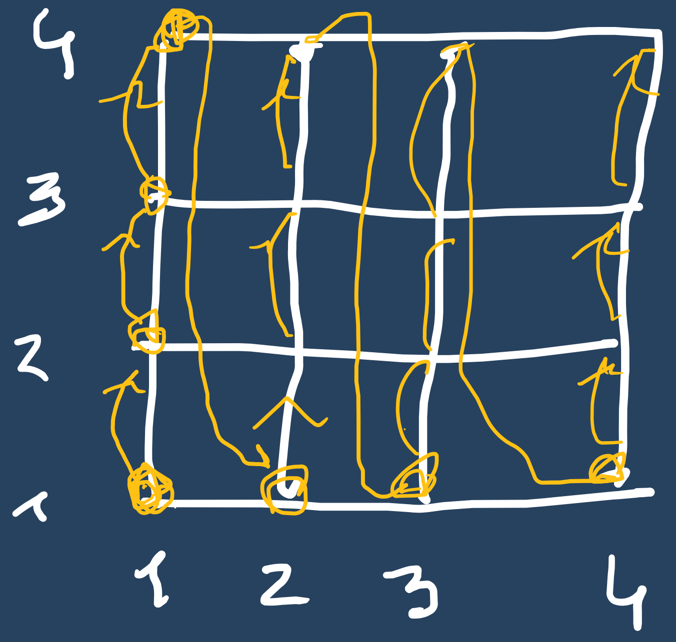
$$U_{(a,b)} = \{(x,y) \in L_1 \times L_2 : (a,b) \leq (x,y)\}$$

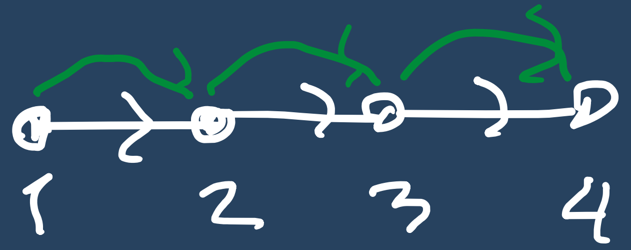
$$(a,b) \leq (x,y) \equiv (a < x) \vee (a = x \wedge b \leq y)$$

$$Z = \{x : x > a\}$$

$$(Z \times L_2) \cup (\{a\} \times \{y \in L_2 : b \leq y\}) = U_{(a,b)}$$

$X = \{1,2,3,4\} = Y$, $\leq$ -natur. pouz





$$\{1,2,3,4\} \otimes \{1,2,3,4\} \underset{ISO}{\simeq} (\{1,2,3,\dots,16\}, \leq)$$

nat. uor.

DOBRE PORZĄDKI

<u>Def</u>. Liniowy porządek $(L, \leq)$ jest dobrym porządkiem, jeśli

$$(\forall A \subseteq L)\left(A \neq \emptyset \rightarrow (\exists a \in A)(\forall x \in A)(a \leq x)\right)$$

a = najmniejszy element A.

Q? $(\mathbb{R}, \leq)$ – jest dobrym porz.

$\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ NIE

$A = \mathbb{R} \leftarrow$ nie ma

najm. elementu.

Q? $([0,\infty), \leq)$ – czy to jest d. porządek?

$A = (0, \infty)$ $(= \mathbb{R}^+)$

• $x \in A \equiv x > 0 \rightarrow x/2 > 0 \rightarrow x/2 \in A$

ale $x/2 < x$.

NIE

Q? $([0,1], \leq)$ – czy jest d. porz.

NIE : $A = (0,1]$.

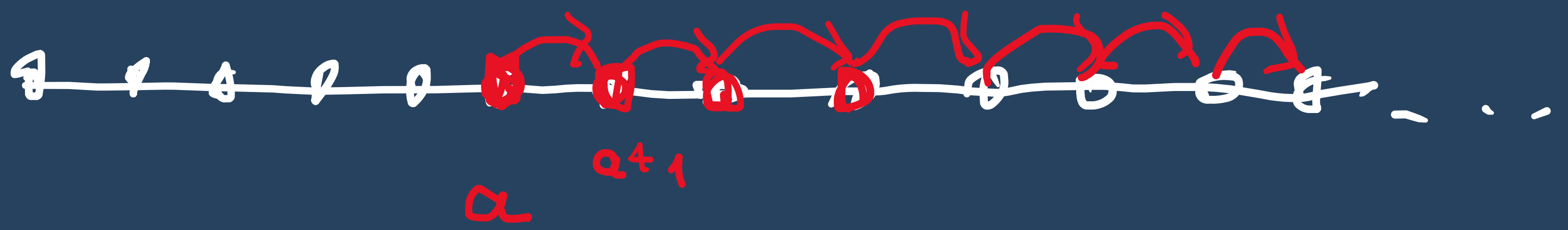
PODSTAWOWY PRZYKŁAD:

dobry porządek $\rightarrow (\mathbb{N}, \leq) \leftarrow$ przyjmujemy to jako aksjomat

WNIOSEK.

Zał. że $A \subseteq \mathbb{N}$, $a \in A$ oraz, że $(\forall x \in A)(x+1 \in A)$. // A jest induktywny

wtedy $\{n \in \mathbb{N} : n \geq a\} \subseteq A$.



INDUKCJA
MATEMAT