Robocze oznaczenie:

$$Bij(A,B) = \{ f \in B^A : f \text{ jest bijekcją między } A \text{ i } B \}$$

Tw. Jeśli A i B są skończone i $|A| = |B|$, to

$$|Bij(A,B)| = n!$$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n \geq 1 : \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \left(= \prod_{k=1}^{n} k \right) \end{cases}$$

Uwaga: $Bij(\emptyset, \emptyset) = \{\emptyset\}$

$|Bij(\emptyset, \emptyset)| = 1 = 0!$

D-d. (ind. mat.) • $(n=1)$

$$\mathrm{Bij}(\{a\},\{b\}) = \{\{(a,b)\}\} \longleftarrow \text{OK}$$

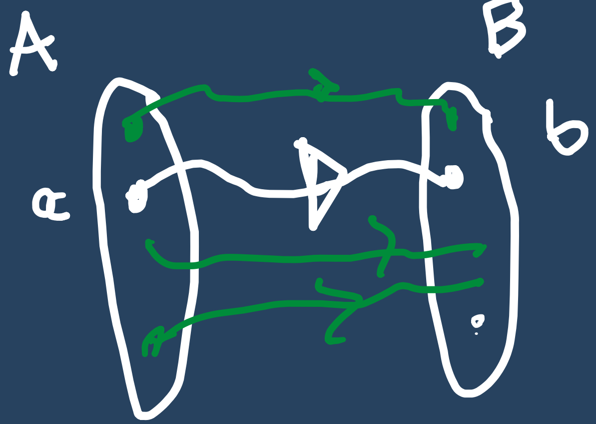
• Załóż. że dla $n \in \mathbb{N}$ tw. jest prawdziwe.

Zał. że $|A| = |B| = n+1$.

Ustalamy $a \in A$

$$\mathrm{Bij}(A,B) = \bigcup_{b \in B} \{ f \in \mathrm{Bij}(A,B) : f(a) = b \}$$

te zbiory są rozł. dla różnych b.



$$= \bigcup_{b \in B} \left\{ \{(a,b)\} \cup h : h \in \mathrm{Bij}(A \setminus \{a\}, B \setminus \{b\}) \right\}$$

uwaga: • A, B - rozł. skończ. $\longrightarrow$ $|A \cup B| = |A| + |B|$

• $A_1, \dots, A_k$ - parami rozłączne, skończone

$$\Rightarrow |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$$

tu też potrzebna jest indukcja (po k; zaczynamy od $k = 2$)

ZADANIE

$$|Bij(A,B)| = \sum_{b \in B} \left| \left\{ \{(a,b)\} \cup h : h \in Bij(A \setminus \{a\}, B \setminus \{b\}) \right\} \right|$$

$$= \sum_{b \in B} |Bij(A \setminus \{a\}, B \setminus \{b\})| \overset{\text{zał. ind.}}{=} \sum_{b \in B} n! = |B| \cdot n!$$

n-elem

$$= (n+1) \cdot n! = (n+1)! \quad \square$$

Wniosek. $|Sym(A)| = |A|!$ A-skończ

$Sym(A) = Bij(A, A)$

Tw. Zał. że A, B są skończone, $|A| = |B|$. Niech $f: A \to B$. Wtedy nast. warunki są równ:

(1) $f: A \xrightarrow{1-1} B$

(2) $f: A \xrightarrow{na} B$

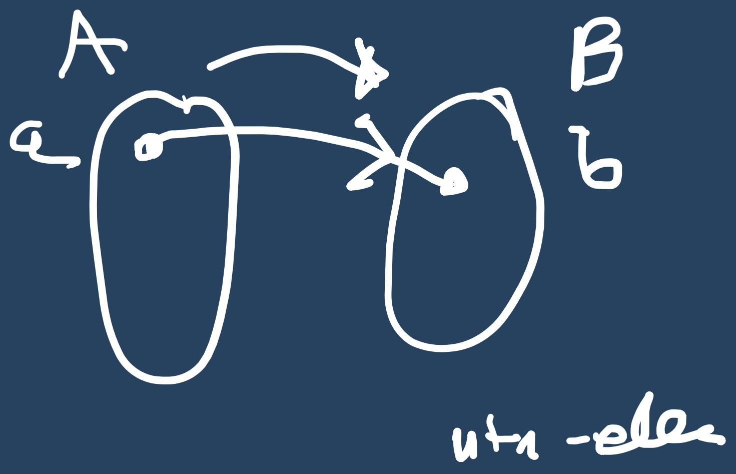
P $A = B = \mathbb{N}$; $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $f(n) = n+1$.

- f jest 1-1
- f nie jest "na"

D-d. Ind. po $|A| = |B| = n$.

- dla $n = 0$: OK
- zał. że dla n jest OK.

$|A| = |B| = n+1$.



(1) $\to$ (2) $\quad f: A \to B$ jest 1-1

weźmy $a \in A$, niech $b = f(a)$.

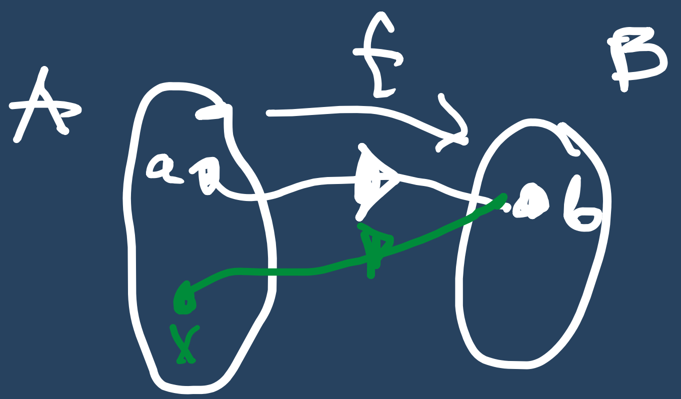
niech $f^* = f \upharpoonright (A \setminus \{a\})$.

$f^*: A \setminus \{a\} \longrightarrow B \setminus \{b\}$ // bo f jest 1-1

więc f^* jest "na". // zał. ind

więc f jest "na".

(2) $\to$ (1) Zał. że $f: A \xrightarrow{\text{"na"}} B$



Ustalmy $b \in B$.

Jest $a \in A$ t. że $f(a) = b$

$$f^* = f \restriction (A \setminus \{a\})$$

$$f^* : A \setminus \{a\} \longrightarrow B.$$

czy może być $b \in \mathrm{rng}(f^*)$?

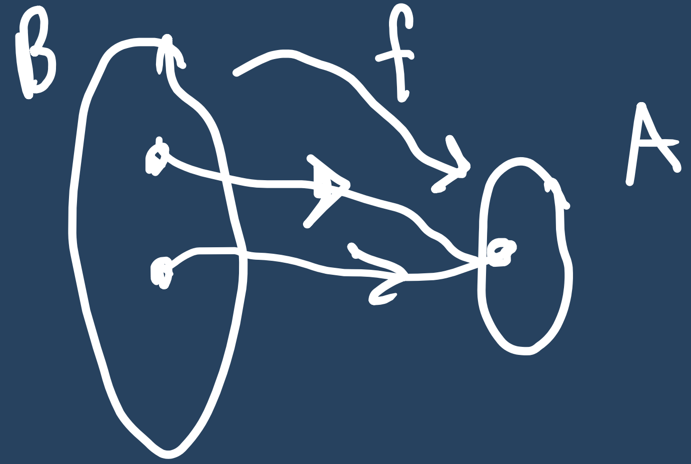
Dok. po pierwsze.

ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA

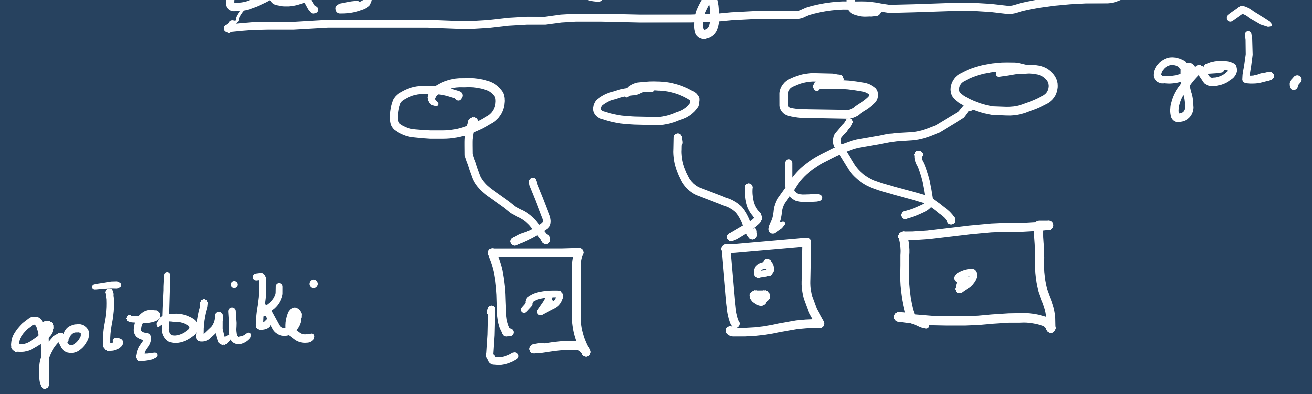
<u>Tw.</u> Zał. że A, B są skończone, $|A| < |B|$ oraz, że $f: B \to A$. Wtedy są dwa różne $b_1, b_2 \in B$ $(b_1 \neq b_2)$ t. że

$$f(b_1) = f(b_2)$$

f nie jest 1-1



<u>Zasada gołębnika</u>



D-d. Ind. po $n = |A|$.

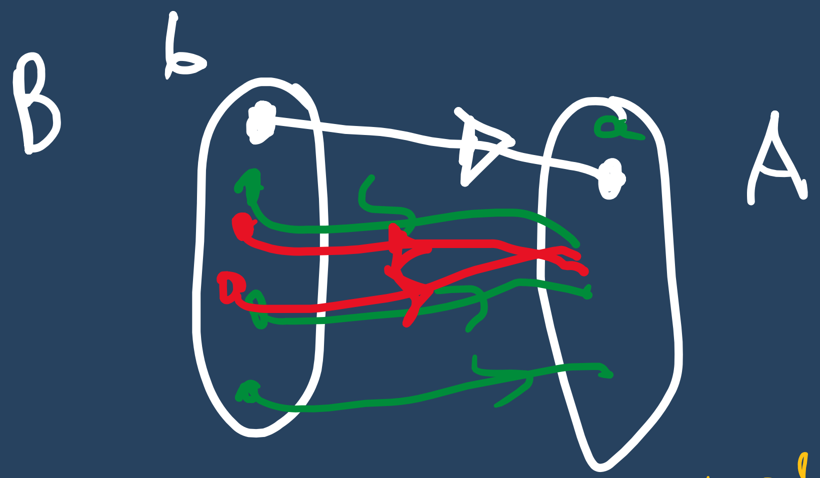
Możemy założ. że $|B| = n+1$.

- dla $n = 1$: $A = \{a\}$, $B = \{b_1, b_2\}$

$$f = \{(b_1, a), (b_2, a)\}.$$

Jest ok.

- zał. że dla n jest ok. Niech $|A| = n+1$ oraz $|B| = n+2$. $f : B \longrightarrow A$. Weźmy $b \in B$.



wtedy $f(b) = a \in A$.

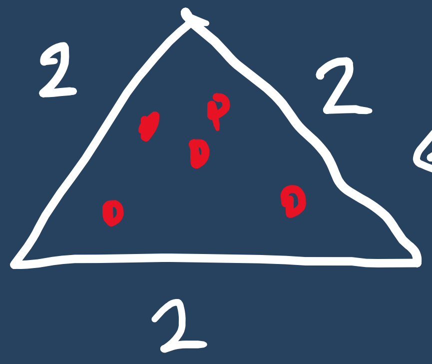
zał. że $(\forall x \in B)(x \neq b \rightarrow f(x) \neq a)$

$$f^* = f \restriction (B \setminus \{b\})$$

n-elem

n+1 elem $f^* : B \setminus \{b\} \longrightarrow A \setminus \{a\}$ $\blacksquare$

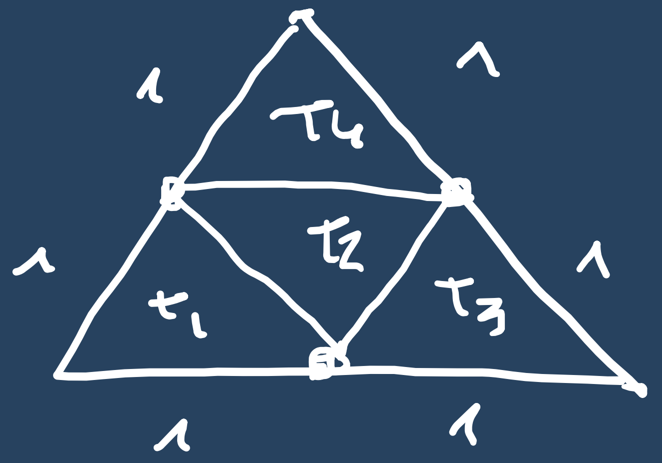
P



T – trójkąt równ. o boku równym 2

mamy $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in T$

TEZA: są $i<j$ t. że & odl$(P_i, P_j) \leq 1$



każde P_i wpada do
z któregoś z trójkątów

$\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4\}$

Zadanie

odl$(P,Q) \leq 1$

(P) Zał. że $x_1, \dots, x_n$ są liczbami naturalnymi. Istnieje $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ t.że $S \neq \emptyset$ i $n \mid \sum_{i \in S} x_i$.

<u>D-d</u>. $s_k = (x_1 + \dots + x_k) \bmod n$; $k = 1, \dots, n$

- jeśli jest k t.że $s_k = 0$ to KONIEC
- zał. że dla $k = 1, \dots, n$ mamy $s_k \neq 0$.

$s_k \in \{1, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow$ są różne $k < l$ $\quad s_k = s_l = r$

$$s_k = v \equiv (x_1 + \dots + x_k) \bmod n = v$$

$$\equiv x_1 + \dots + x_k = \alpha \cdot n + v$$

$$s_l = v \equiv x_1 + \dots + x_l = \beta \cdot n + v$$

$(k < l)$

$$(x_1 + \dots + x_l) - (x_1 + \dots + x_k) = (\beta - \alpha) \cdot n$$

$$\parallel$$

$$x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_l$$

$\boxtimes$

Tw. Załóżmy, że $(X, \leq)$ jest dobrym porządkiem. Nie istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ t. że

$$(\forall n \in \mathbb{N})(f(n+1) < f(n))$$

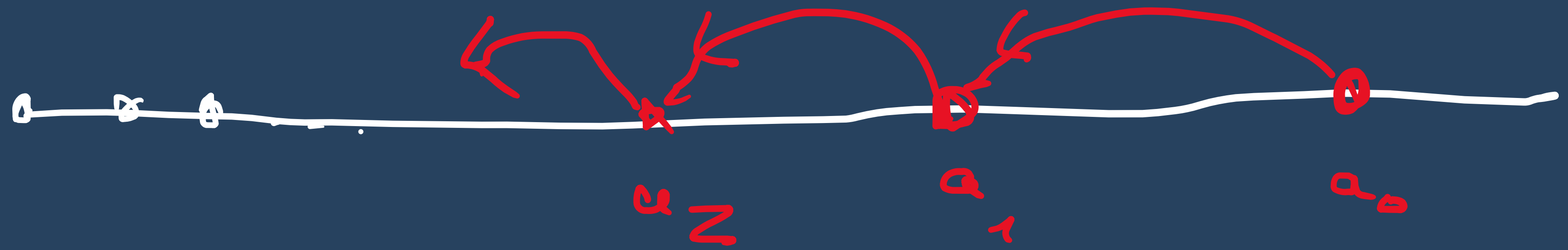
D-d. Załóżmy, że $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ i $(\forall n)(f(n+1) < f(n))$

Niech $A = rng(f) = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$

wtedy $A \neq \emptyset$. Jest $a \in A$ t. że $(\forall x \in A)(a \leq x)$

Jest $n_0 \in \mathbb{N}$ t. że $a = f(n_0)$. ~~to~~ wtedy

$$A \ni f(n_0+1) < f(n_0) = a$$ sprzeczność.



$(X, \leq)$

!! to mogę robić tylko skończenie wiele razy

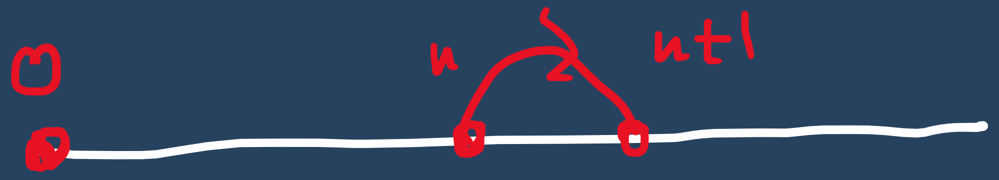
FAKT: ta własność $(\mathbb{N}, \leq)$ jest równoważna dobremu uporz. $(\mathbb{N}, \leq)$.

Szkic dowodu.

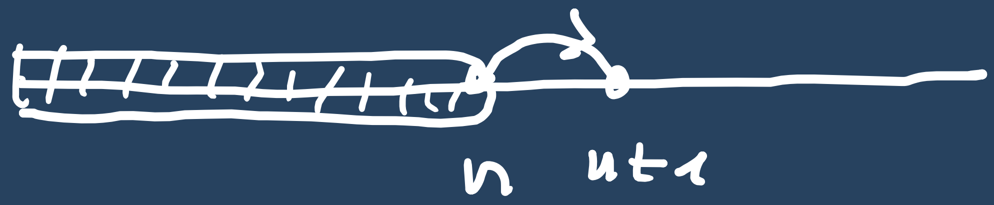
Stosujemy taki wariant indukcji:

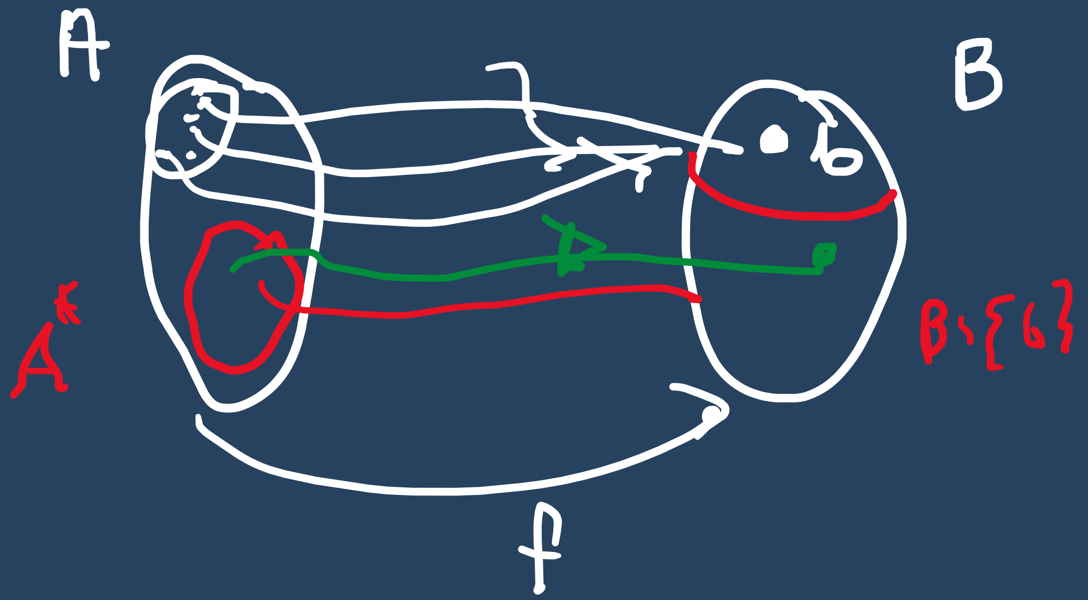
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \varphi(0) \\ \bullet\ (\forall n)\big((\forall k<n)\varphi(k) \longrightarrow \varphi(n)\big) \end{array}\right\} \Rightarrow (\forall n)\varphi(n).$$

STAND. IND



zmod.





$|A| = |B| = n+1$

Ustalamy $b \in B$

$A^* = A \setminus f^{-1}(\{b\})$

$|f^{-1}(\{b\})| \geq 2$

$f^* = f \restriction A^*$

$f^* : A^* \xrightarrow[1-1]{na} \operatorname{rng}(f^*) \subseteq B \setminus \{b\}$ ← zał. ind.

$|A^*| \leq n-1$

$|\operatorname{rng}(f^*)| = |A^*|$

$B = \{b\} \mathbin{\dot\cup} \operatorname{rng}(f^*)$

$|B| = 1 + |\operatorname{rng}(f^*)| \leq 1 + (n-1) = n$ ■

P

```
int nwd(int x, int y) {
    while (x != y) {
        if (x>y)  { x = x-y; }
      else        { y = y-x; }
    }
    return x;
}
```