Teoria Mocy: II

Oznaczenia: • $|A| = \aleph_0$ (alef zero)

$$\begin{array}{c} |A| = \aleph_0 \\ \| \! | \\ |A| = |\mathbb{N}| \end{array}$$

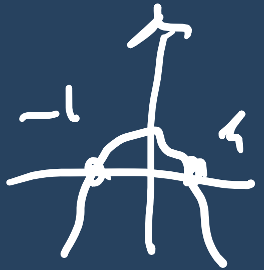
• $|A| = \mathfrak{c}$ (continuum) $\equiv$ $|A| = |\mathbb{R}|$.

• $(A \sim B) \equiv (|A| = |B|)$

Przykład zast. tw Cantora-Bernsteina

$$|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$$

1) $f:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}$; $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$



$y=1-x^2$

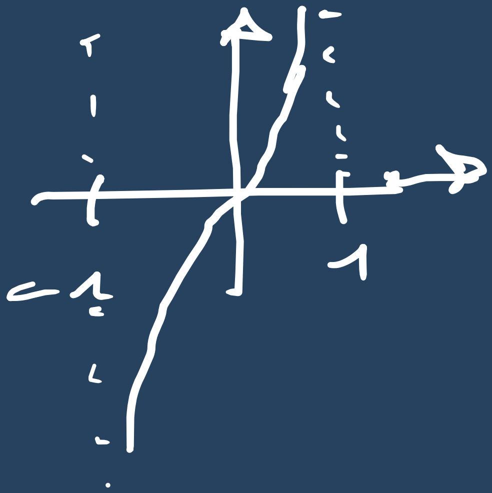
- $f'(x)=\dfrac{(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}>0$

f jest ostro-rosnąca // tw. Cauchy'ego o wart. średniej

f jest 1-1

- $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\dfrac{1}{0+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\dfrac{-1}{0+}=-\infty$

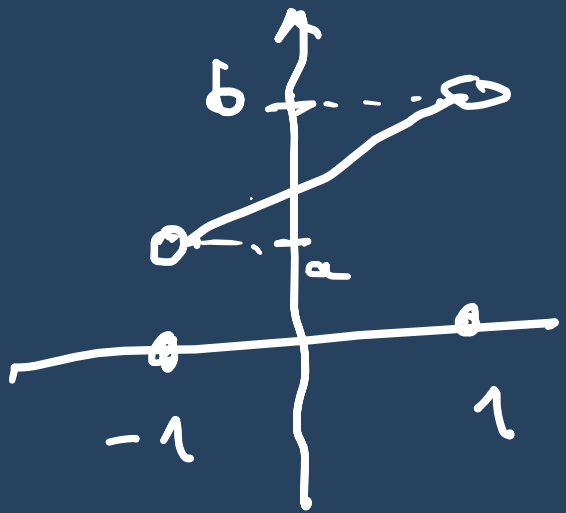


f jest "na" // wT. Darboux funkcji ciągłych

ZATEM $(-1,1) \sim \mathbb{R}$.

- Niech $a<b$.

$$\varphi(x) = \frac{b-a}{2}(x+1)+a$$



$$\varphi(-1) = a$$
$$\varphi(1) = b$$

$$\varphi|_{(-1,1)} : (-1,1) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} (a,b)$$

ZATEM: $(-1,1) \sim (a,b)$.

- niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie taki, że dla pewnych $a < b$ mamy
$$(a,b) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$$

- $(-1,1) \sim (a,b)$
- $|(a,b)| \leq |A| \leq |\mathbb{R}|$

$$|\mathbb{R}| = |(-1,1)| = |(a,b)| \leq |A| \leq |\mathbb{R}|$$

$$|\mathbb{R}| \leq |A| \leq |\mathbb{R}|$$

$$|A| = |\mathbb{R}|, \ |A| = \mathfrak{c}.$$

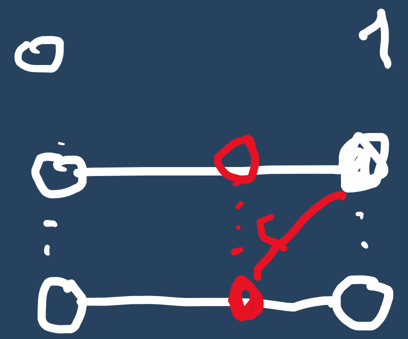
Wn. Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest taki, że

$$(\exists a,b \in \mathbb{R})\big((a<b) \wedge (a,b) \subseteq A\big)$$

to $|A| = \mathfrak{c}$.

PP.

- $(0,1) \subseteq (0,1]$
- zatem $|[0,1]| = \mathfrak{c}$
- ale $|(0,1)| = \mathfrak{c}$
- zatem $(0,1) \sim (0,1]$



ZADANIE: znajdź $f : (0,1] \xrightarrow[\text{na}]{1-1} (0,1)$.

Zbiory przeliczalne.

<u>Def.</u> Zbiór A jest przeliczalny jeśli $A = \emptyset$ lub

$$(\exists f)(f : \mathbb{N} \xrightarrow{na} A).$$

Uwaga: $f : \mathbb{N} \xrightarrow{na} A \Rightarrow A = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$;

$a_n = f(n) \Rightarrow A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Obserwacje • $|A| = \aleph_0 \rightarrow A$ przeliczalny

- A - skończony $\Rightarrow$ A przeliczalny

D-d. 1) $A = \emptyset \Rightarrow$ OK

2) $A \neq \emptyset$; $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $|A| = n > 0$

$$f(k) = \begin{cases} a_{k+1} & : k < n \\ a_n & : k \geq n \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_n & a_n & a_n & \end{array}$$

Tw. Nast. war. są równoważne:

1) A jest przeliczalny

2) $(\exists n \in \mathbb{N})(|A| = n) \vee (|A| = \aleph_0)$.

Muszmy pok., że (1) → (2).

D-d. Zał., że A jest przeliczalny, możemy zał. że $(\forall n \in \mathbb{N})(|A| \neq n)$.

Mamy $f: \mathbb{N} \xrightarrow{na} A$

INTUICJA:

$0 \to a, \cancel{a}, b, \cancel{a}, \cancel{a}, c, \cancel{a}, \cancel{b}, \cancel{c}, d, \cancel{a}, e, f, \ldots$

$a = f(0)$, $f(1)$

1, 2, 3, 4, 5

Definiujemy $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$:

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(n+1) = f\left(\min\{k \in \mathbb{N} : f(k) \notin \{g(0), \dots, g(n)\}\}\right) \end{cases}$$

- Jasne, że $\operatorname{rng}(g) \subseteq A$.
- $g(n+1) \notin \{g(0), \dots, g(n)\}$; $(\forall n)$

  zatem $\boxed{g : \mathbb{N} \xrightarrow[1-1]{} A.}$
- g jest dobrze określona, bo A nie jest skończony.

@ Zał. że $rng(g) \neq A$.

Jest $b \in A \setminus rng(g)$ $\qquad f(0)\, f(1) \dots f(k)$

$k = \min\{n : f(n) \notin rng(g)\}$!!!

wtedy $\{f(0), \dots, f(k-1)\} \subseteq rng(g)$

$f(0) = g(n_0),\ f(1) = g(n_1), \dots, f(k-1) = g(n_k)$

mamy $n_0, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$.

Niech $n > n_0, \dots, n_{k-1}$.

wtedy
$$g(k) = f(\min \underbrace{\{l : f(l) \notin \{g(i) : i < l\}\}}) = f(k).$$

!!!

sprzeczność.

to jest algorytm zachłanny.

PRZYKŁADY

Hotel Muskće:

$$\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \leftarrow \text{pokoje}$$

1)
- Wszystkie pokoje zajęte.
- pojawił się nowy gość.
- co można zrobić?

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

wolne

$$|\mathbb{N}^+| = |\mathbb{N}| = \aleph_0 .$$

1) wszystkie pokoje zajęte

Przyjechała wycieczka turystów

$\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad c_n \neq c_m$ dla $n \neq m$

Co możemy zrobić?

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad f(n) = 2n$

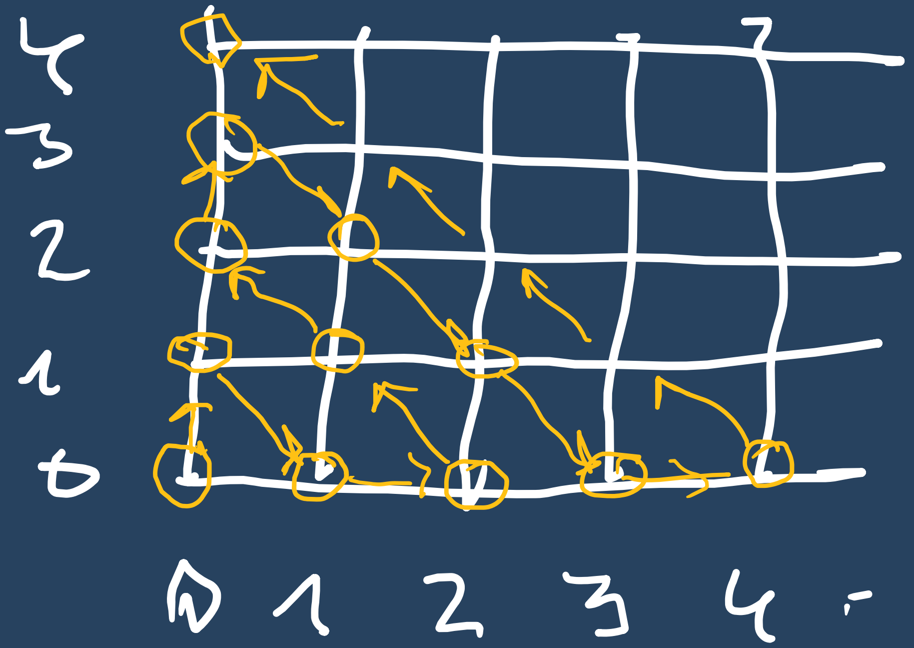
$\operatorname{rng}(f) = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{N} \setminus \operatorname{rng}(f) = \{2k+1 ; k \in \mathbb{N}\}.$

3) $\{\{c_k^n\}_{k \in \mathbb{N}}\}_{n \in \mathbb{N}}$?

Tw. $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$

D-d (rysunkowy)



$f: \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$

$f \Leftarrow$ spacer po A

2) Określamy $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

wzorem

$$\varphi((k,l)) = 2^k(2l+1) - 1$$

- $\varphi((k,l)) = \varphi((k',l')) \to$

$$2^k(2l+1) - 1 = 2^{k'}(2l'+1) - 1$$

$$2^k\underbrace{(2l+1)}_{NP} = 2^{k'}\underbrace{(2l'+1)}_{NP}$$

$$2^k \mid 2^{k'},\ 2^{k'} \mid 2^k \to k = k'$$

$$2l+1 = 2l'+1 \to l = l'$$

czyli φ jest 1-1

- weźmy $n \in \mathbb{N}$. $\qquad \varphi((k,l)) = 2^k(2l+1) - 1$

$$n+1 = 2^k(2l+1)$$

dla pewnych $k, l \in \mathbb{N}$.

Wtedy

$$\varphi((k,l)) = 2^k(2l+1) - 1 = n+1-1 = n$$

ZATEM φ jest "na".

Fakt: $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

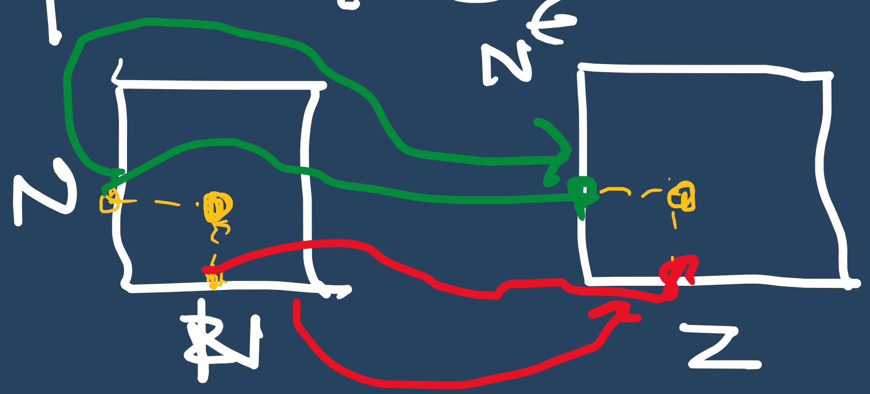
D-d

Zadanie: podaj na to wzór!!!

Rozwiązanie: $f(n) = \frac{1}{4}(-1)^{n+1}\left(-1 + (-1)^{n+1} + 2(n+1)\right).$

(P)

$$|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+| = \aleph_0$$



$$f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Z}$$

$$g : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}^+$$

$$\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$$

$$\psi((k, l)) = (f(k), g(l))$$

zadanie to jest bijekcją

P Wiemy, że $|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+| = \aleph_0$.

$$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\varphi((k,n)) = \frac{k}{n}$$

Jasne, że φ jest "na" $\mathbb{Q}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\psi", "\text{na},\ 1\text{-}1"'] \arrow[rr, bend right, "\varphi\circ\psi", "\text{na}"'] & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+ \arrow[r, "\varphi", "\text{na}"'] & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

- $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny
- ale $\mathbb{Q}$ jest nieskończony.

ZATEM: $\boxed{|\mathbb{Q}| = \aleph_0}$