CO ZROBILIŚMY: 1) $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$

2) $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$

KONSTRUKCJA $\mathbb{R}$ Z $\mathbb{Q}$.

ANALIZA: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: ciąg Cauchy'ego

$$\equiv$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall m,n \geq N)(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

$$\mathcal{C} = \{\bar{a} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : (\forall n > 0)_{\mathbb{N}} (\exists N)_{\mathbb{N}} (\forall k,l)_{\mathbb{N}} ((k > N \wedge l > N) \rightarrow |\bar{a}(k) - a(l)| < \tfrac{1}{n})\}$$

na ~~$\mathbb{R}$~~ $\mathcal{C}$ określamy relację

$$\bar{a} \approx \bar{b} \equiv (\forall n>0)_{\mathbb{N}} (\exists N)_{\mathbb{N}} (\forall k)_{\mathbb{N}} \left(k>N \longrightarrow |\bar{a}(k) - \bar{b}(k)| < \tfrac{1}{n} \right).$$

- przech. $\bar{a} \approx \bar{b}$, $\bar{b} \approx \bar{c}$.

Ustalamy $n \in \mathbb{N}$, $n>0$. Wtedy $2n \in \mathbb{N}$, $2n>0$.

Jest $N_1 \in \mathbb{N}$: $(\forall k > N_1)\left(|\bar{a}(k) - \bar{b}(k)| < \frac{1}{2n}\right)$

Jest $N_2 \in \mathbb{N}$: $(\forall k > N_2)\left(|\bar{b}(k) - \bar{c}(k)| < \frac{1}{2n}\right)$.

$N = \max(N_1, N_2)$. wtedy

$$k>N \to |\bar{a}(k) - \bar{c}(k)| = |(\bar{a}(k) - \bar{b}(k)) - (\bar{c}(k) - \bar{b}(k))|$$

$$\le |\bar{a}(k) - \bar{b}(k)| + |\bar{b}(k) - \bar{c}(k)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}. \blacksquare$$

Wn: $\sim$ rel. równ. na $\mathcal{C}$.

DEF: $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$.

- dodawanie:

$$[\bar{a}] + [\bar{b}] = [\bar{a}+\bar{b}] \qquad (\bar{a}+\bar{b})(k) = \bar{a}(k)+\bar{b}(k)$$

$$[\bar{a}] \cdot [\bar{b}] = [\bar{a}\cdot\bar{b}] \qquad (\bar{a}\cdot\bar{b})(k) = a(k)\cdot b(k)$$

FAKT: te działania są dobrze określone

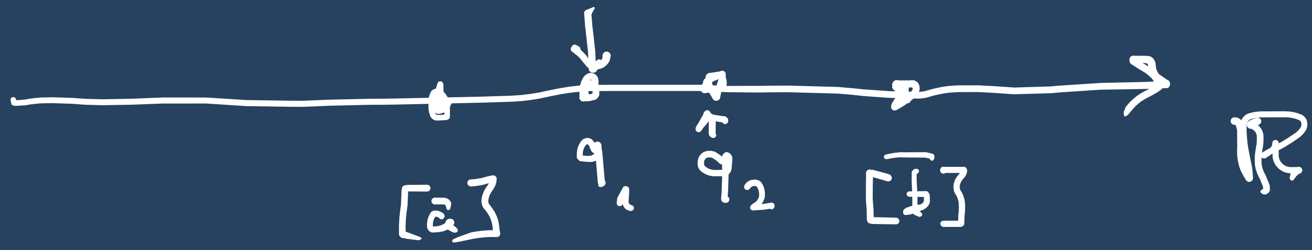
FAKT: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jest ciałem ~~~~ algebr.

zero: $[\bar{0}]$ $\quad \bar{0} = \mathrm{const}_0$

jedyn: $[\bar{1}]$ $\quad \bar{1} = \mathrm{const}_1$

Nierówność ostra

$$[\bar{a}] < [\bar{b}] \equiv (\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q})\big(q_1 < q_2 \wedge (\exists N)(\forall k > N)(\bar{a}(k) < q_1 \wedge q_2 < \bar{b}(k))\big)$$



FAKT: $\leq$ jest liniowym porz. na $\mathcal{C}/\approx$.

ZANURZENIE $\mathbb{Q}$ w $\mathcal{C}/\approx$:

$$\varphi : \mathbb{Q} \to \mathcal{C}/\approx \; : \; q \mapsto [\mathrm{const}_q].$$

FAKT: φ jest zanurzeniem algebr;

czyli

$$\varphi : (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq) \xrightarrow{1-1} (\mathcal{C}/_{\approx}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{\leq}).$$

czyli np.

$$(\forall x, y \in \mathbb{Q})\,(\varphi(x+y) = \varphi(x) \boldsymbol{+} \varphi(y))$$

podobnie dla $\cdot$, $\varphi(0) = \boldsymbol{0}$, $\varphi(1) = \boldsymbol{1}$

$$x \leq y \equiv \varphi(x) \boldsymbol{\leq} \varphi(y).$$

FAKT: $\varphi[\mathbb{Q}]$ jest gęste w $\mathcal{C}/_{\approx}$

$$[a] < [b] \longrightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})\ [a] < [\mathrm{const}_q] < [b])$$

$\boxed{\text{FAKT: } \mathcal{C}/_{\approx_\mathbb{Q}} \text{ jest zupełne, czyli każdy ciąg Cauchego elementów } \mathcal{C}/_{\approx} \text{ jest zbieżny (do jakiegoś elementu } \mathcal{C}/_{\approx})}$

Wskazówka: rozważ ciąg $[a_\alpha]_{\alpha \in \mathbb{N}}$ Cauchego elementów $\mathcal{C}/_{\approx}$.

PODSUMOWANIE

$$\mathbb{N} \xrightarrow[1-1]{\varphi_1} \mathbb{Z} \xrightarrow[1-1]{\varphi_2} \mathbb{Q} \xrightarrow{\varphi_3} \mathbb{R}$$

INF.

unsigned int   int   float

$x \rightsquigarrow (\text{int})\,x$

$y \rightsquigarrow (\text{float})\,y$

L. Kronecker: "Liczby natur. stworzył Bóg, a resztę stworzył człowiek"

AKSJOMATYCZNA TEORIA MNOGOŚCI

Język teorii mnogości (Zermelo-Fraenkela)

- spójniki logiczne : $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
- nawiasy : $($, $)$
- kwantyf. : $\forall, \exists$
- zmienne : $x_0, x_1, x_2, \ldots$

- jeden symbol binarny : $\in$

Formuły : poprawnie sformułowane napisy

P

$$\varphi = [x_1 \in x_2] \vee (\exists x_3)(x_3 \in x_2)$$

$\varphi(x_1, x_2)$

formuła

wiązane

zm. wolna w φ

$$\tilde{\varphi} = (\exists x_1)(\forall x_2)\big(x_1 \in x_2 \vee (\exists x_3)(x_3 \in x_2)\big)$$

tu nie mamy zmiennych wolnych

zdanie

A 1 (Ekstensjonalności)

$$(\forall x)(\forall y)\big((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y\big).$$

A 2 (zbioru pustego)

$$(\exists x)(\forall y)(\neg(y \in x))$$

FAKT: $(\forall x_1)(\forall x_2)\Big(\big((\forall y)(\neg(y \in x_1)) \wedge (\forall y)(\neg(y \in x_2))\big) \to x_1 = x_2\Big)$

czyli istnieje dokł. jeden zbiór pusty

Możemy wpr. symbol $\emptyset$.

A3 (pary)

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)\big(t \in z \Leftrightarrow (t = x \vee t = y)\big)$$

$\{x, y\}$

FAKT: jedyność takiego z

Oznaczenie: $\{x, y\}$, $\{x\}$

FAKT: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$

są parami różne

A4 (sumy)

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\left(z \in y \longleftrightarrow \boxed{\exists u}(u \in x \wedge z \in u)\right)$$

$\bigcup x$

! jedyność !

P. mamy x, y. Budujemy $\{x, y\}$.

Liczymy $\bigcup\{x, y\} = x \cup y$

Możemy zdef. $x \cup y := \bigcup\{x, y\}$

Po A3: możemy zdef.: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$

(def. Kurat.)

Wprowadzamy skrót:

$$x \subseteq y := (\forall z)(z \in x \to z \in y)$$

Uwaga ($\equiv$ A.EKST)

$$(\forall x, y)(((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)) \to x = y).$$

(A5) (zbioru potęgowego)

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x)$$

$\uparrow$

$P(x)$ $\Leftarrow$ jedyność. $\{\emptyset\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

P $(\forall x)(P(x) \neq x)$; P $\emptyset, P(\emptyset), P(P(\emptyset)), \dots$

(A6) (wyróżniania) Dla dowolnej formuły $\varphi(x, \vec{y})$ mamy

$\vec{y} : y_1, y_2, \ldots y_k$

$$(\forall \vec{y})(\forall x)(\exists z)(\forall t)(t \in z \longleftrightarrow (t \in x \wedge \varphi(t, \vec{y})))$$

$\{t \in x : \varphi(t, \vec{y})\} \leftarrow$! jedn. wyznaczone

(P) $$x \cap y = \{t \in x : \underbrace{t \in y}\}$$

$\varphi(t, y) =$ "$t \in y$"

$$x \setminus y = \{t \in x : \neg(t \in y)\}$$

- $\left.\begin{array}{l} x \in a \\ y \in b \end{array}\right\} \rightarrow x, y \in a \cup b \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \{x\} \subseteq a \cup b \\ \{x, y\} \subseteq a \cup b \end{array}\right\}$

$$\rightarrow \{x\}, \{x, y\} \in P(a \cup b)$$

$$\downarrow$$

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq P(a \cup b)$$

$$\downarrow$$

$$(x, y) \in \{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(a \cup b))$$

Możemy więc zdefiniować

$$a \times b := \{ z \in P(P(a \cup b)) : (\exists y_1 \in a)(\exists y_2 \in b)(z = (y_1, y_2)) \}$$