Aksj. wyróżniania:

mamy zbiór x. mamy jakąś formułę $\varphi(t, \vec{y})$. mamy ustalone $b_1, .., b_n$.
wtedy $\{t \in x : \varphi(t, b_1, .., b_n)\}$
też jest zbiorem.

$\{t \in x : \varphi(t, b_1, .., b_n)\}$

• Konstr. $x \times y$

$$\left.\begin{array}{l} a \in x \\ b \in y \end{array}\right\} \to a, b \in x \cup y \to$$

$$\to \{a\}, \{a, b\} \subseteq x \cup y$$

$$\to \{a\}, \{a, b\} \in P(x \cup y)$$

$$\to \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq P(x \cup y) \to (a, b) \in PP(x \cup y)$$

$$x \times y = \{ t \in PP(x \cup y) : (\exists a \in x)(\exists b \in y)((a,b) = t) \}.$$

$$\mathrm{rel}(x) := (\exists y)(x \subseteq y \times y)$$

$$\mathrm{fnc}(f) := \mathrm{rel}(f) \wedge (\forall x)(\forall y_1, y_2)\big(((x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f) \to y_1 = y_2\big)$$

$$\mathrm{dom}(x) := \{ t \in \bigcup\bigcup x : (\exists s)(x = (t,s)) \}$$

$$\mathrm{rng}(x) := \{ t \in \bigcup\bigcup x : (\exists s)(x = (s,t)) \}$$

$$f : x \to y := \mathrm{fnc}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = x \wedge \mathrm{rng}(f) \subseteq y.$$

$$\| \quad \mathrm{fnc}(f, x, y)$$

zadanie

$$\bigcup P(x) = x$$

$f: X \xrightarrow{1-1} Y \equiv \ldots$

$f: X \xrightarrow{na} Y \equiv \ldots$

$f: X \xrightarrow[na]{1-1} Y \equiv \ldots$

$|X| = |Y| \equiv \ldots$

NA RAZIE A1+...+A6 JEST SŁABĄ TEORIĄ ($\equiv$ teoria liczb naturalnych)

- wiemy, że $\emptyset, P(\emptyset), PP(\emptyset), \ldots$ ← parami różne

A7 (nieskończoności)

$$(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$$

czyli: jest pewien zbiór x t. że

- $\emptyset \in x$
- $\emptyset \cup \{\emptyset\} \in x$; $\{\emptyset\} \in x$
- $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in x$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} =$

$$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in x$$

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$
- $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$
- $n+1 = \{0, 1, 2, .., n\}$

$$\mathrm{ind}(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)$$

Aks. nesk: $(\exists x)\ \mathrm{ind}(x)$.

Tw. $(\exists x)(ind(x) \wedge (\forall y)(ind(y) \rightarrow x \subseteq y))$

D-d. Weźmy jakiś zbiór a t. że $ind(a)$.

$$x = \bigcap \{y \in P(a) : ind(y)\}$$

$\neq \emptyset$, bo do niego należy a

akz. wyr.

Zadanie: to jest ten zbiór.

Wn. $(\exists! x)(ind(x) \wedge (\forall y)(ind(y) \rightarrow x \subseteq y))$

TEN ZBIÓR OZNACZAMY PRZEZ ω.

interpretujemy go jako $\mathbb{N}_0$

AKSJ. zastępowania

chodzi mniej więcej o ~~to~~ to:

$$\left.\begin{array}{l} f \leftarrow \text{funkcja} \\ a \leftarrow \text{zbiór} \end{array}\right\} \longrightarrow f[a] \text{ było zbiorem}$$

war. funkcyjna: $\varphi(x,y)$

$$(\forall x)(\exists y)(\varphi(x,y) \wedge (\forall z)(\varphi(x,z) \to z=y))$$

$$\equiv$$

$$(\forall x)(\exists! y)\varphi(x,y).$$

P

$\varphi(x,y) = $ "$y=\emptyset$"

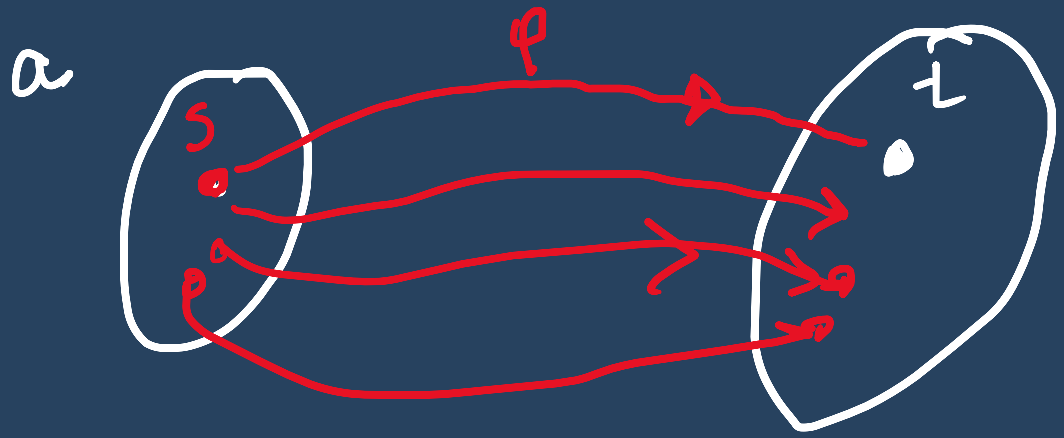
$\varphi(x,y) = $ "$y=P(z)$"

$\varphi(x,y) = $ "$y=\{x\}$"

$\varphi(x,y) = $ "$y = X \cup \{x\}$"

A 8 (zastępowanie) Dla dowolnej formuły $\varphi(s,t,\vec{z})$ mamy:

$$(\forall \vec{z})\left[(\forall s)(\exists ! t)\,\varphi(s,t,\vec{z}) \longrightarrow (\forall a)(\exists b)(\forall t)\big(t\in b \leftrightarrow (\exists s\in a)\,\varphi(s,t,\vec{z})\big)\right]$$



$b = \varphi_{\vec{z}}[a]$

(P) $\varphi(x,y) =$ "$y = P(x)$"

zast. A8 do φ oraz do $a=\omega$.

otrzymujemy

$$b = \{P(t) : t\in\omega\},$$

$\boxed{P}$ nieprecyzyjny przykład:

mamy rel. równ. ~~to~~ $\approx$ na x

$$\varphi(t,s) \begin{cases} t\in x \rightsquigarrow [t]_{\approx} & (=\{a\in x : (a,t)\in\approx\}) \\ t\notin x \rightsquigarrow \emptyset \end{cases}$$

$$X/_{\approx} = \varphi[x].$$

A9 (regularności)

$$\Big((\forall x)\big(x \neq \emptyset \longrightarrow (\exists y \in x)(y \cap x = \emptyset)\big)\Big)$$

Wniosek: $(\forall x)(\neg(x \in x))$.

<u>D-d</u>. Rozważmy ust. x. Niech $a = \{x\}$

wtedy $a \neq \emptyset$. Jest $y \in a$ t.że $y \cap a = \emptyset$

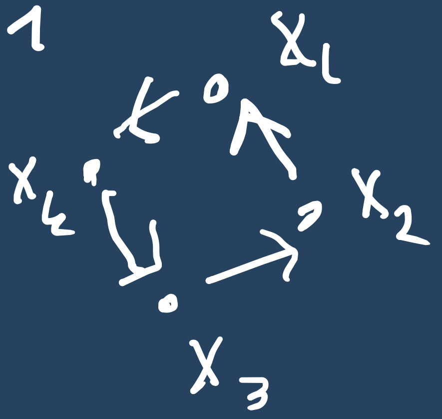
zatem $x \cap a = \emptyset$.

gdyby $x \in x$, to $x \in x \cap \{x\}$

czyli $x \cap \{x\} = x \cap a \neq \emptyset$.

wn. nie istnieją $x_1, x_2, \dots x_n$ t. że

$$x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \dots \ni x_n \ni x_1$$



D-d. Niech $a = \{x_1, \dots, x_n\}$.

$$x_1 \cap a \ni x_2$$

$$x_2 \cap a \ni x_3$$

$$\vdots$$

$$x_n \cap a \ni x_1$$

zatem $(\forall t \in a)(t \cap a \neq \emptyset)$ sprz.

Zadanie. Nie istnieje $f : \omega \longrightarrow \ldots$

t. że $(\forall n)_{\omega} \big(f(n+1) \in f(n) \big)$

czyli: nie istnieje taki ciąg

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \ldots$$

Hint. Niech $a = \{ f(n) : n \in \omega \}$.

$$ZF = A1 + \ldots + A9$$

teoria mnogości Zermelo – Fraenkel'a.

Rozważmy jakąś teorię T (= zbiór zdań)

(P) Język: $\circ, e$

AL: $(\forall x, y, z)(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$

AN: $(\forall x)(x \circ e = x \wedge e \circ x = x)$

AI: $(\forall x)(\exists y)(x \circ y = e \wedge y \circ x = e)$

Czy $TG = AL + AN + AI$ jest niesprzeczna?

Odp.: TAK

$G = (\{0\}, +, 0)$ ← grupa jedno-elementowa.

$AB = (\forall x,y)(x \cdot y = y \cdot x)$

Czy $TG + AB$ jest niesprz?

ODP: TAK, bo G jest abelowa.

Czy $TG + \neg AB$ jest sprzeczna?

ODP: NIE.

$G = Sym_3$ (= permutacje zbioru $\{1,2,3\}$)

$\left.\begin{array}{ll} TG & \text{- niesp.} \\ TG + AB & \text{- niesprz.} \\ TG + \neg AB & \text{- niesprz} \end{array}\right\}$ AB - niezależne od TG.

$$T^* = TG + \neg AB + (\exists x_1, x_2, x_3)\big((x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge (\forall y)(y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3) \big)$$

T^* jest sprzeczna, bo

jeśli $(G, \cdot, e)$ jest grupą i $|G| = 3$

to $(G, \cdot, e) \cong C_3 = (\{0,1,2\}, \oplus_3, 0)$

czyli $(G, \cdot, e)$ jest abelowa.

Oznaczenie

$\mathrm{Cons}(T) \equiv$ "teoria T jest niesprzeczna"

consistant

GŁÓWNE PYTANIE MATEMATYKI XXI wieku :

Czy $\mathrm{Cons}(ZF)$?

$$AC \equiv (\forall x)\Big[\big(((\forall y \in x)(y \neq \emptyset) \wedge (\forall y_1, y_2 \in X)(y_1 \neq y_2 \to y_1 \wedge y_2 = \emptyset)\big) \to (\exists s)(\forall y \in s)(\exists t)(y \wedge s = \{t\})\Big].$$

$$ZFC = ZF + AC.$$

Tw (Gödel, 1937)

$$\mathrm{Cons}(ZF) \longrightarrow \mathrm{Cons}(ZFC)$$

Tw (Cohen, 1964)

$$\mathrm{Cons}(ZF) \longrightarrow \mathrm{Cons}(ZF + \neg AC)$$

wniosek. ani AC, ani $\neg$AC nie wynikają z ZF.

czyli: AC jest niezależne od ZF.

Uwaga: aksj. wyróżniania
aksj. zastępowania
są schematami aksjomatów:
" dla dowolnej formuły φ ... "
....

PWr

Tw (C. Ryll-Nardzewski)
ZF nie jest skończenie aksjomatyzowalna.

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

DYSKUSJA PO WYKŁADZIE

zaburzenie symetrii

$$\|$$

$$\{\{x,y\},\{x\}\}$$

gdybyśmy zrobili tak

$$(x,y) = \{\{x\},\{y\}\}$$

$$\|$$

$$(y,x) = \{\{y\},\{x\}\}$$

$$\{a,b\} = \{b,a\}$$

można by tak

$$(x,y) = \{\{y\},\{x,y\}\}$$

y

x