Specjalne klasy zbiorów.

<u>Def</u>. $\mathrm{tran}(x) = (\forall y \in x)(y \subseteq x)$

zbiór przechodni / tranzytywny

FAKT: 1) $\mathrm{tran}(x) \longrightarrow \mathrm{tran}(P(x))$

2) $\mathrm{tran}(x) \longrightarrow \mathrm{tran}(x \cup \{x\})$

3) $(\forall a)\big((\forall t \in a)(\mathrm{tran}(t)) \rightarrow \mathrm{tran}(\bigcup a)\big)$

D-d 1) zał. że $\mathrm{tran}(x)$.

niech $y \in P(x)$. Chcemy pok. że $y \subseteq P(x)$.

niech $t \in y$. Ale $y \subseteq x$. więc $t \in x$.

Ale $\mathrm{tran}(x)$, więc $t \subseteq x$, więc $t \in P(x)$.

$y \subseteq P(x)$.

2) $\mathrm{tran}(x) \longrightarrow \mathrm{tran}(x \cup \{x\})$

$\cancel{\#}$ zał. że $y \in x \cup \{x\}$.

- $y \in x$; wtedy $y \subseteq x$; więc $y \subseteq x \cup \{x\}$
- $y = x$; wtedy $y \subseteq x \cup \{x\}$.

3) zadanie.

<u>UWAGA:</u> $\mathrm{tran}(\emptyset) \quad (\equiv (\forall y)(y \in \emptyset \rightarrow y \subseteq \emptyset))$

$$\begin{cases} R_0 = \emptyset \\ R_{n+1} = P(R_n) \end{cases}$$

$\emptyset, P(\emptyset), PP(\emptyset), PPP(\emptyset), \ldots$

$R_0 \in R_1 \in R_2 \in R_3 \in$

uwaga: $R_n \in P(R_n) = R_{n+1}$

dowody trochę.

$(3) \rightarrow R_\omega = \bigcup_n R_n \leftarrow$ tranz.

Def. $\mathrm{ord}(x) \equiv \mathrm{tran}(x) \wedge (\forall u, v \in x)\big((u \in v) \vee (u = v) \vee (v \in u) \big)$

liczba porządkowa $\equiv$ takie x, że $\mathrm{ord}(x)$.

FAKT: (1) $\mathrm{ord}(\emptyset)$

(2) $(\forall x)(\mathrm{ord}(x) \longrightarrow \mathrm{ord}(x \cup \{x\}))$.

D-d. Zał. że $\mathrm{ord}(x)$. Niech $u, v \in x \cup \{x\}$.

- P1: $u, v \in x \longrightarrow$ ok.
- P2: $u \in x \wedge v = x \longrightarrow u \in v$

  $v \in x \wedge u = x \longrightarrow v \in u$
- P3: $u, v = x \longrightarrow u = v$

WNIOSEK: $\mathrm{Ord}(\emptyset)$ — $\mathrm{ord}(0)$

$\mathrm{Ord}(\emptyset \cup \{\emptyset\})$ — $\mathrm{ord}(1)$

$\mathrm{Ord}((\emptyset \cup \{\emptyset\}) \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ — $\mathrm{ord}(2)$

Zatem: $(\forall n \in \omega)(\mathrm{ord}(n))$.

WNIOSEK: $\mathrm{ord}(\omega)$.

D-d. ω = "najm. w sensie $\subseteq$ zbiór a t. że
$\emptyset \in a \wedge (\forall x \in a)(x \cup \{x\} \in a)$"

Niech $b = \{n \in \omega : \mathrm{ord}(n)\}$

- $\emptyset \in b$
- $n \in b \rightarrow n \in \omega \wedge \mathrm{ord}(n) \rightarrow n \cup \{n\} \in b$

Zatem $\omega \subseteq b$. Zatem $\omega = b$.

Oznaczenie: $\mathrm{Ord}(x)$: $x+1 = x \cup \{x\}$.

Wniosek: Jeśli $\mathrm{ord}(\alpha)$ to

$(\alpha, \in\restriction_\alpha)$ jest liniowym ostrym porządkiem

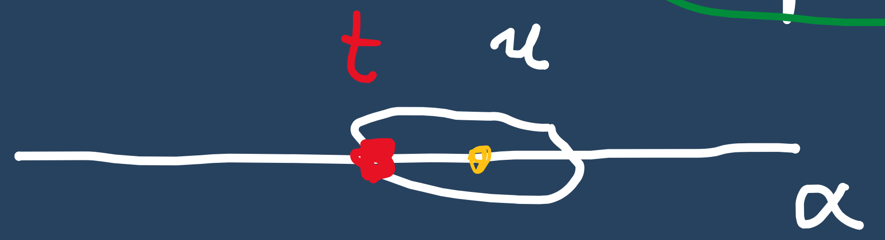
określony $x \leq_\alpha y \equiv x \in y \lor x = y$

dla $x, y \in \alpha$.

$(\alpha, \leq_\alpha) \leftarrow$ liniowy porządek

Tw. Jeśli α jest l. porządkową, to $(\alpha, \leq_\alpha)$ jest dobrym porządkiem. !!!

D-d



$\leq_\alpha$ - lin. porz

Niech $u \subseteq \alpha$ i $u \neq \emptyset$.

Z AKSJ. REG. istnieje $t \in u$ t.że $t \cap u = \emptyset$.

CHCEMY POK. ŻE $(\forall x \in u)(t \leq x)$.

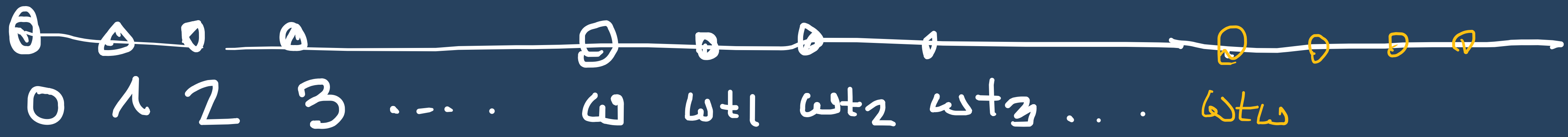
Niech $x \in u$, wtedy $x \in t \lor x = t \lor t \in x$

zał. że $x \in t$. Ale $x \in u$. więc $x \in t \cap u = \emptyset$.

ZATEM $x \notin t$. WIĘC $t \leq x$. $\blacksquare$

UWAGA: $(\omega, \leq_\omega)$ – d. porz.

$(\omega+1, \leq)$, $(\underbrace{(\omega+1)+1}_{\omega+2}, \leq)$, $(\underbrace{((\omega+1)+1)+1}_{\omega+3}, \leq)$, ...



FAKT: $(\forall\alpha)(\mathrm{ord}(\alpha) \to (\forall x\in\alpha)(\mathrm{ord}(x)))$

D-d:

$x\in\alpha$: trans(x) : $x\in\alpha \to x\subseteq\alpha$.

$t\in x$; $t\in\alpha$ $t\subseteq\alpha \to t\subseteq x$.

$u,v\in x \to u,v\in\alpha \to u\in v \vee u=v \vee v\in u$.

(P) $5 = S(S(S(S(S(0)))))$ $\qquad S(x) = x \cup \{x\}$

$5 = 4 \cup \{4\} = \{0,1,2,3,4\}.$

$n+1 = \{\emptyset, 1, 2, \ldots, n\}.$

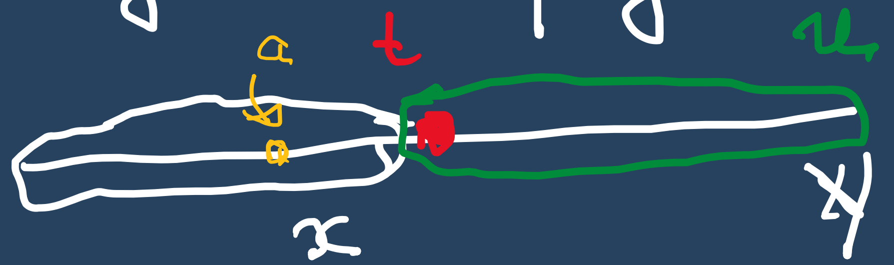
Lemat. Zał. że $\mathrm{ord}(\alpha)$. Wtedy dla dowolnych $x, y \in \alpha$:

$$x \leq_\alpha y \equiv x \subseteq y.$$

D-d $\Rightarrow$ $x \leq_\alpha y \overset{\text{def}}{=} x \in y \lor x = y$ $\qquad$ tranz

$\Rightarrow x \subseteq y \lor x = y \Rightarrow x \subseteq y.$

- zał. że $x \leq y$ i $x \neq y$.



Niech $u = y \setminus x$; niech $t = \in$-min element u

czyli $\underline{t \in u}$ oraz $t \cap u = \emptyset$.

CLAIM: $t = x$.

- weźmy $a \in x$. $a \notin u$

$\underline{a \in t} \vee \cancel{a = t} \vee \cancel{t \in a}$

$a = t$: $a \in u$ bzdura

$t \in a$: $t \in a \in x$ → $t \in x$: bzdura.

↑ przech

ZATEM $x \subseteq t$.

- chcemy pokazać, że $t \subseteq x$.

Niech $a \in t$.

$t \in u$

$t \cap u = \phi$

CEL: $a \in x$.

Załóżmy, że $a \notin x$. Wtedy $a \in u = y \setminus x$,

$\left.\begin{array}{l} a \in u \\ a \in t \end{array}\right] \to a \in u \cap t = \phi$.

sprz.

CZYLI: $t \subseteq x$.

$\boxtimes$

$x \leq_x y \equiv x \subseteq y$.

Tw. $(\forall\alpha)(\forall\beta)(\mathrm{ord}(\alpha)\wedge \mathrm{ord}(\beta) \to$

$$\to (\alpha\in\beta \vee \beta\in\alpha \vee \alpha=\beta)).$$

D-d. Zał. że α, β są l. porz.

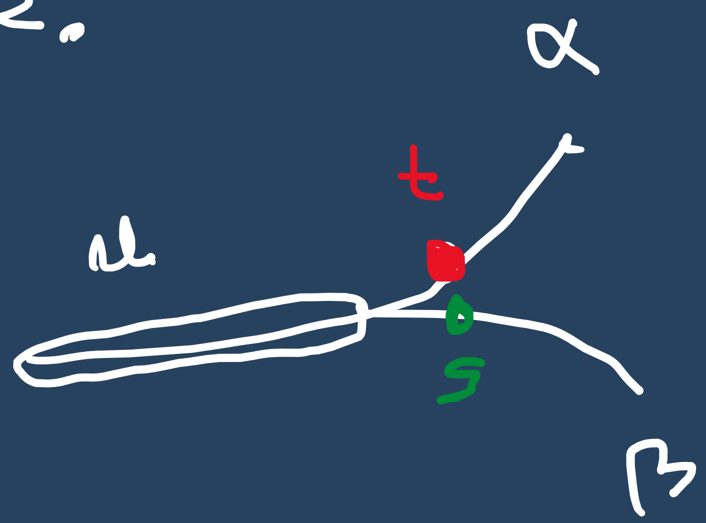
Niech $u = \alpha\cap\beta$.

- $u=\alpha \to \alpha\subseteq\beta$
- $u=\beta \to \beta\subseteq\alpha$

Zał. że $u\neq\alpha$, $u\neq\beta$.

$t = \in\text{-}\min(\alpha\setminus u)$

$s = \in\text{-}\min(\beta\setminus u)$



Pok. że $u = t$
(Z) $u = s$.

więc $t = s$. sprzeczność.

KLASYFIKACJA L. PORZ.

- $\mathrm{scc}(\alpha) \equiv \mathrm{ord}(\alpha) \wedge (\exists \beta)(\mathrm{ord}(\beta) \wedge \alpha = \beta + 1)$

  następniki

- $\mathrm{lim}(\alpha) \equiv \mathrm{ord}(\alpha) \wedge \alpha \neq \emptyset \wedge \neg \mathrm{scc}(\alpha).$

  graniczna

$$\mathrm{ord}(\alpha) \longrightarrow (\alpha = 0) \vee \mathrm{scc}(\alpha) \vee \mathrm{lim}(\alpha).$$

FAKT: $\beta < \alpha + 1 \longrightarrow \beta \leq \alpha$

D-d: $\beta < \alpha + 1 \equiv \beta \in \alpha \cup \{\alpha\} \Longrightarrow \beta \in \alpha \vee \beta = \alpha \longrightarrow \beta \leq \alpha.$

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < \omega < \omega+1 < \omega+2 < \ldots$$

FAKT: $(\forall x)\Big(\big((\forall y \in x)\ \mathrm{ord}(y)\big) \longrightarrow \mathrm{ord}(\bigcup x)\Big).$

suma zbioru liczb porz. jest l. porządk.

D-d. Załóżmy, że x jest taki, że
$(\forall t \in x)(\operatorname{ord}(t))$.

$S = \bigcup x$.

1) $\operatorname{tran}(S)$ // bo suma rodz. zb. przech. jest przechodnia

2) niech $u, v \in S = \bigcup x$.
Jest $\alpha \in x$ t.że $u \in \alpha$ ← l. porz
Jest $\beta \in x$ t.że $v \in \beta$ ←
więc $\operatorname{ord}(u)$, $\operatorname{ord}(v)$.
więc są porównywalne ∎

Obserwacja. Zał. że $(\forall u)(u \in x \to \mathrm{ord}(u))$.

Niech $\gamma = \bigcup x$. Wiemy, że $\mathrm{Ord}(\gamma)$.

Wtedy 1) $(\forall u \in x)(u \leq \gamma)$

2) $(\forall \gamma')\big((\forall u \in x)(u \leq \gamma') \longrightarrow \gamma \leq \gamma'\big)$.

CZYLI: $\bigcup x =$ najmn. ogr. górne x.
(w sensie $\subseteq$; w sensie $\leq$)
$= \sup_{\leq}(x)$.

WNIOSEK: $\neg(\exists x)\big((\forall y)(\mathrm{ord}(y) \to y \in x)\big)$

D-d. Zał. że jest x t. że

$$(\forall y)(\mathrm{ord}(y) \to y \in x).$$

Niech $x^* = \{y \in x : \mathrm{ord}(y)\}$ // aks. wyr.

Niech $\alpha = \bigcup x^*$. Wtedy $\mathrm{ord}(\alpha)$.

Niech $\beta = \alpha + 1$.

ZADANIE: $\beta \notin x$.

<u>sprzeczność</u>

KONIEC WYKŁADU

tranz : $t \in x \to t \subseteq x$.

dyskusja po wykładzie

$0 = \emptyset$

$1 = \{\emptyset\}$

$\vdots$

$5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$a = \{0, 1, 3, 4\}$

- $3 \in a$

$3 \subseteq a$?

$3 \subseteq a = \{0, 1, 2\} \subseteq a$

$\Rightarrow 2 \in a$.

$R_3 = P(P(P(\emptyset))) =$

$= P(P(\{0\})) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) =$

$\{\emptyset\}\ldots$ $=$