Wstęp do Logiki i Struktur Formalnych
Lista zadań

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska, WIT

Wrocław • 2023

G1: Rachunek Zdań

Zadanie 1

Niech π będzie waluacja określoną na zbiorze zdań $\{p_1, p_1, p_2, \ldots\}$ taką, że $\pi(p_i) = \mathbb{1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy i jest liczbą parzystą. Oblicz

1. $\mathrm{val}(p_0 \to (p_1 \wedge p_2), \pi)$
2. $\mathrm{val}((p_1 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee p_1), \pi)$
3. $\mathrm{val}(\bot \to (p_1 \wedge p_2), \pi)$
4. $\mathrm{val}(p_0 \to (\top \wedge \bot), \pi)$

Zadanie 2

Które z następujących zdania są tautologiami:

1. $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2. $((p \to q) \to p) \leftrightarrow p$
3. $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
5. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
6. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
7. $p \to (\neg p \to q)$
8. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$

Zadanie 3

Pokaż, że następujące zdania są tautologiami:

1. $(\neg(p_1 \vee \ldots \vee p_n)) \leftrightarrow ((\neg p_1) \wedge \ldots \wedge (\neg p_n))$
2. $(\neg(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n)) \leftrightarrow ((\neg p_1) \vee \ldots \vee (\neg p_n))$
3. $(p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to p_4))) \leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee p_4)$

Zadanie 4

Działanie binarne $\bullet$ na zbiorze X nazywamy *łącznym*, jeśli $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$ dla dowolnych $x, y, z \in X$. Działanie $\bullet$ nazywamy *przemiennym* jeśli $x \bullet y = y \bullet x$ dla dowolnych $x, y \in X$.

1. Pokaż, że z łączności działania $\bullet$ wynika, że dla dowolnych p, q, r i s ze zbioru X mamy
$$p \bullet (q \bullet (r \bullet s)) = ((p \bullet q) \bullet r) \bullet s = ((p \bullet q) \bullet (r \bullet s)\ .$$

2. Pokaż, że potęgowanie $\wedge$ określone na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich wzorem $x \wedge y = x^y$ nie jest działaniem łącznym oraz że nie jest działaniem przemiennym.

Zadanie 5

Pokaż, że jeśli średnia arytmetyczna liczb $x_1, \ldots, x_n$ jest większa od liczby a, to co najmniej jedna z tych liczb jest większa od liczby a. Przeprowadź dokładną analizę przeprowadzonego rozumowania.

Zadanie 6

Zgodnie z używanym obecnie kalendarzem gregoriańskim:

> Rok jest przestępny, jeśli dzieli się przez 4, lecz nie dzieli się przez 100, chyba, że dzieli się przez 400.

Niech p oznacza zdanie „rok R jest podzielny przez 4”, q - „rok R jest podzielny przez 100”, i r - „rok R jest podzielny przez 400”.

1. Zapisz za pomocą zdań p, q i r zdanie „rok R jest przestępny”.
2. Napisz w języku C funkcję służącą do sprawdzania, czy dany rok jest przestępny.
3. Spróbuj zrobić to samo w języku JavaScript.

Zadanie 7

Spójnik Pierce, zwany również operatorem NOR, jest zdefiniowany wzorem $p \perp q = (\neg p \wedge \neg q)$. *Kreska Sheffera*, zwana również operatorem NAND, jest zdefiniowana wzorem $p \uparrow q = (\neg p \vee \neg q)$.

1. Wyraź alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą negacji oraz koniunkcji.
2. Wyraź koniunkcję, implikację oraz równoważność za pomocą negacji oraz alternatywy.
3. Wyraź negację, koniunkcję, alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą spójnika Pierce'a.
4. Wyraź negację, koniunkcję, alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą kreski Sheffera.

Zadanie 8

Spójnik $\triangle$, zwany *operatorem XOR*, jest zdefiniowany wzorem $p \triangle q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

1. Udowodnij łączność oraz przemienność spójnika $\triangle$.
2. Oblicz $p \triangle p$, $(p \triangle q) \triangle q$, $p \triangle \bot$, $p \triangle \top$.
3. Zastanów się jak można wykorzystać własności spójnika $\triangle$ do kodowania informacji.

Zadanie 9

Język C posiada następujące operatory logiczne: && (koniunkcja), || (alternatywa) oraz ! (negacja). Zdefiniuj w tym języku pozostałe standardowe operatory logiczne.

Zadanie 10

Udowodnij poprawność następujących reguł dowodzenia:

1. $\{p\} \models p$,
2. $\{p, q\} \models p \wedge q$,
3. $\{p \wedge q\} \models p$,
4. $\{p, \neg p\} \models q$,
5. $\{p, p \rightarrow q\} \models q$, (reguła *Modus Ponens*)
6. $\{\alpha \vee p, \neg\alpha \vee q\} \models p \vee q$ (*reguła rezolucji*).

Zadanie 11

Załóżmy, że $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \zeta$. Niech α będzie dowolnym zdaniem. Pokaż, że następujące zdania są równoważne

1. $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \alpha$
2. $\{\phi_1, \ldots, \phi_n, \zeta\} \models \alpha$

Zadanie 12

Bez korzystania z tabelek zero-jedynkowych pokaż, że

1. $\{p_1, \neg p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee p_3, \neg p_3 \vee p_4\} \models p_4$
2. $\{\neg p_1, p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee p_3, \neg p_3 \vee p_4\} \models p_4$

Zadanie 13

Zapisz w notacji polskiej następujące formuły: $((p \vee q) \vee r) \vee s$, $(p \vee q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$, $(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

* Zadanie 14

Pokaż, że jeśli zdanie jest zbudowane tylko ze stałych zdaniowych $\perp$ i $\top$, to jest ono tautologią lub zdaniem sprzecznym.

* Zadanie 15

Załóżmy że $\varphi(p_0, \ldots, p_n)$ jest tautologią oraz że ψ_0, $\ldots \psi_n$ są ustalonymi zdaniami. Pokaż, że zdanie $\varphi(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ jest również tautologią.

Zadanie 16

Niech $\varphi_0 = p$ oraz $\varphi_{n+1} = (\varphi_n) \rightarrow p$ dla liczb naturalnych n. Dla jakich liczb naturalnych n zdanie φ_n jest tautologią?

Zadanie 17

Niech $\varphi_0 = p$ oraz $\psi_{n+1} = p \rightarrow (\psi_n)$ dla liczb naturalnych n. Dla jakich liczb naturalnych n zdanie ψ_n jest tautologią?

* Zadanie 18

Ile istnieje nierównoważnych formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennej zdaniowe p? Ile istnieje nierównoważnych formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennych zdaniowych p, q?

* Zadanie 19

Ile jest waluacji π określonych dla zmiennych zdaniowych $p_1, p_2, \ldots, p_n$ takich, że

1. $\mathrm{val}((p_1 \vee p_2) \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge \ldots \wedge p_n, \pi) = \mathbb{1}$
2. $\mathrm{val}((p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \to p_n), \pi) = \mathbb{1}$

Zadanie 20 (*Lewis Carroll*)

Pokaż, że z następującego zbioru zdań

1. wszyscy moi synowie są szczupli,
2. wszystkie moje zdrowe dzieci uprawiają sport,
3. żadne moje dziecko które jest łakomczuchem nie jest szczupłe,
4. żadna moja córka nie uprawia sportu

wynika, że "żadne moje zdrowe dziecko nie jest łakomczuchem".
Wskazówka: Skorzystaj z reguły rezolucji (patrz zadanie 10)

** Zadanie 21

Pokaż, że za pomocą koniunkcji i alternatywy nie można zdefiniować negacji. Pokaż, że za pomocą alternatywy i koniunkcji nie można zdefiniować implikacji

* Zadanie 22

Zapisz w postaci DNF (dysjunkcyjno normalnej) oraz CNF (koniunkcyjno normalnej) zdanie $(p \leftrightarrow q)$.

Zadanie 23

Definiujemy długość zdania: $l(p) = 1$ dla zmiennych zdaniowych p; $l(\neg\phi) = l(\phi) + 1$; $l(\phi \wedge \psi) = l(\phi \vee \psi) = l(\phi) + l(\psi) + 1$. Niech $\phi = (p_{11} \wedge p_{12}) \vee (p_{21} \wedge p_{22}) \vee (p_{31} \wedge p_{32}) \vee (p_{41} \wedge p_{42})$.

1. Oblicz $l(\phi)$
2. Przekształć zdanie ϕ do równoważnego zdania ψ w postaci koniunkcyjno-normalnej.
3. Oblicz $l(\psi)$.
4. Spróbuj uogólnić to zadanie.

Zadanie 24

Uprość następujące wyrażenia języka C:

1. `if (!(x>0) || !(x>10)) {...}`
2. `if ((x<0) || (! (x<0) && (y>0))) {...}`
3. `if (!(!(x<0) || (y>0))) {...}`

** Zadanie 25

Na pewnej wyspie mieszka dwóch tubylców. Jeden z nich zawsze mówi prawdę, drugi - zawsze kłamie. Na wyspę dostał się wędrowiec. Stanął przed rozwidleniem dróg. Spotkał tubylca. Chce dowiedzieć się która z dwóch dróg doprowadzi go do stolicy. Może zadać tylko jedno pytanie. Jak powinien je sformułować?

Zadanie 26 (Logika SQL)

Rozważamy zbiór wartości logicznych $S = \{\mathbb{0}, \frac{1}{2}, \mathbb{1}\}$. Wartość $\frac{1}{2}$ interpretujemy jako „nie zdefiniowana". Podstawowe działania logiczne definiujemy następująco: $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$, $\neg x = 1 - x$, $x \rightarrow y = (\neg x) \vee y$ oraz $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

1. Zdefiniuj samodzielnie pojęcie waluacji zdania rachunku zdań w zbiorze wartości logicznych S i pokaż, że w tej logice żadne zdanie nie zawierające symboli $\top$ i $\perp$ nie jest tautologią.
2. Co możesz powiedzieć o „prowdziwości" zdań $p \wedge (\neg p)$ i $p \vee (\neg p)$?
3. Dla jakich waluacji zdanie $p \rightarrow q$ jest fałszywe (przyjmuje wartość $\mathbb{0}$)

Zdania ϕ, ψ nazywamy równoważne ($\phi \equiv \psi$) jeśli dla dowolnej waluacji π mamy $val(\phi, \pi) = val(\psi, \pi)$.

4. Pokaż, że $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$. Sformułuj i pokaż dualne prawo de Morgana.
5. Czy spójniki $\wedge$ i $\vee$ są łączne?
   Uwaga: Rozważana logika to jedna z najprostszych „logik nieklasycznych".

G2: Zbiory

Zadanie 27

Które z następujących zdań są prawdziwe dla dowolnych zbiorów A, B:

1. $A \cup B = B \cup A$,
2. $A \cup B = B \cap A$,
3. $A \cup (A \cap A) = A \cap A$,
4. $A \vartriangle A = B \vartriangle B$,
5. $A \vartriangle A = (B \vartriangle B) \vartriangle A$.

Zadanie 28

Pokaż, że z Aksjomatu Ekstensjonalności wynika, że operacja przekroju jest poprawnie określona. To znaczy, pokaż że jeśli A i B są dowolnymi zbiorami, to istnieje tylko jeden zbiór C taki, że $x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$. Pokaż to samo dla różnicy zbiorów.

Zadanie 29

Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwe są następujące równości:

1. $A \cap A = A$,
2. $A \cup B = B \cup A$,
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$
6. $(A \vartriangle B) \cap C = (A \cap C) \vartriangle (B \cap C)$.

Zadanie 30

Zapisz za pomocą symbolu inkluzji Aksjomat Ekstensjonalności.

Zadanie 31

Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwe są następujące zdania:

1. $A \subseteq A$,
2. $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \to A \subseteq C$,
3. $A \subseteq A \cup B$,
4. $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C) \to A \cup B \subseteq C$,
5. $A \cap B \subseteq A$,
6. $(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \to A \subseteq B \cap C$,
7. $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \to A \cup C \subseteq B \cup D$,
8. $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \to A \cap C \subseteq B \cap D$.

Zadanie 32

Niech A i B będą podzbiorami ustalonej przestrzeni Ω. Pokaż, że

1. $(A^c)^c = A$,
2. $A \setminus B = A \cap B^c$,
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
5. $\emptyset^c = \Omega$,
6. $\Omega^c = \emptyset$,
7. $A \subseteq B \to B^c \subseteq A^c$.

Zadanie 33

Pokaż, że $A \cup B$ jest najmniejszym (w sensie inkluzji) zbiorem zawierającym jednocześnie zbiory A oraz B. Sformułuj i udowodnij analogiczny fakt dla przekroju dwóch zbiorów.

Zadanie 34

Pokaż, że $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ oraz $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ dla dowolnych zbiorów A, B, i C.

Zadanie 35

Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A i B mamy $A \setminus (A \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$.

Zadanie 36

Pokaż, ze dla dowolnych zbiorów A i B prawdziwa jest równoważność $A = B \leftrightarrow A \setminus B = B \setminus A$.

Zadanie 37

Rozwiąż równanie $[0,1] \triangle X = [-1, \frac{1}{2})$. Niech $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4\}$ i $C = \{1,5\}$. Znajdź taki zbiór X, że $(A \triangle X) \triangle B = C$.

Zadanie 38

Dlaczego $\{\emptyset\} \neq \emptyset$? Pokaż, że zbiory $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\ldots$ są parami różne. Wyznacz zbiory $\mathrm{P}(\emptyset)$, $\mathrm{P}(\mathrm{P}(\emptyset))$, $\mathrm{P}(\{a,b\})$ i $\mathrm{P}(\{a,b,c\})$. Ile elementów mają te zbiory?

Zadanie 39

Niech $S(x) = x \cup \{x\}$. Niech $x_0 = \emptyset$ oraz $x_{n+1} = S(x_n)$ dla wszystkich liczb naturalnych n.

1. Wyznacz x_n dla wszystkich $n \leqslant 5$.

2. Pokaż, że jeśli $n < m$ to $x_n \in x_m$.
3. Pokaż, że $x_{n+1} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

Uwaga: Metodą tą można zdefiniować liczby naturalne za pomocą zbiorów.

Zadanie 40

Czy iloczyn kartezjański jest operacją łączną? Czy jest przemienny? Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwe są następujące równości:

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Zadanie 41

Pokaż, że $A \times B = B \times A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

Zadanie 42

Pokaż, że $A \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{P}(A) \subseteq \mathrm{P}(B)$. Czy dla dowolnych zbiorów A i B prawdziwe są równości $\mathrm{P}(A) \cap \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B)$ i $\mathrm{P}(A) \cup \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cup B)$?

Zadanie 43

Niech $A, B \subseteq \Omega$. Opisz rodzinę wszystkich zbiorów które mogą zostać zdefiniowane ze zbiorów A i B za pomocą operacji sumy, przekroju i dopełnienia.

Zadanie 44

Niech $A = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 7, 8\}$ i $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Ile różnych zbiorów możesz zbudować za pomocą operacji $\cup$, $\cap$, ^{c} ze zbiorów A, B i C? Czy zbiór $\{8\}$ należy do tej rodziny zbiorów?

Zadanie 45

Zapisz w postaci "nawiasowej" wyrażenia $ABC\cup\cup$, $AB\cup C\cup$ oraz $ABC\cup\cup AB\cup C\cup =$.

Zadanie 46

Niech $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ będą funkcjami zdaniowymi określonymi dla elementów przestrzeni Ω. Pokaż, że

1. $\{x \in \Omega : \varphi(x)\}^c = \{x \in \Omega : \neg\varphi(x)\}$,
2. $\{x \in \Omega : \varphi(x) \wedge \psi(x)\} = \{x \in \Omega : \varphi(x)\} \cap \{x \in \Omega : \psi(x)\}$,
3. $\{x \in \Omega : \varphi(x) \vee \psi(x)\} = \{x \in \Omega : \varphi(x)\} \cup \{x \in \Omega : \psi(x)\}$.

* Zadanie 47

Pokaż, że dla każdego zbioru A zachodzi nierówność $A \neq \mathrm{P}(A)$.

* Zadanie 48

Pokaż, że nie istnieje taki zbiór Ω, że $A \subseteq \Omega$ dla dowolnego zbioru A.

Zadanie 49

Niech $\mathcal{L}$ oznacza zbiór wszystkich zdań rachunku zdań. Zbiorem konsekwencji zbioru $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$ nazywamy zbiór

$$\mathrm{Cons}(\mathcal{P}) = \{\alpha \in \mathcal{L} : \mathcal{P} \models \alpha\} \ .$$

1. Wyznacz $\mathrm{Cons}(\{p, \neg p\})$.
2. Wyznacz $\mathrm{Cons}(\emptyset)$.
3. Pokż, że jeśli $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \subseteq \mathrm{Cons}(\mathcal{P})$, to $\beta \in \mathrm{Cons}(\mathcal{P})$.
4. Pokaż, że jeśli $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$, to $\mathrm{Cons}(\mathcal{P}) \subseteq \mathrm{Cons}(\mathcal{Q})$.
5. Pokaż, że $\mathrm{Cons}(\mathrm{Cons}(\mathcal{P})) = \mathrm{Cons}(\mathcal{P})$.

G3: Kwantyfikatory

Zadanie 50

Zakresem zmienności zmiennych jest zbiór liczb naturalnych. Zapisz przy użyciu symboli $0, 1, +, \cdot, \leqslant, |$ oraz symboli logicznych następujące funkcje zdaniowe:

1. x jest liczbą parzystą,
2. x jest liczbą pierwszą,
3. x jest liczbą złożoną,
4. $x = NWD(y, z)$,
5. każde dwie liczby mają najmniejszą wspólną wielokrotność,
6. nie istnieje największa liczba pierwsza.
7. każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych (*hipoteza Goldbacha*)
8. każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych (*twierdzenie Lagrange'a*)

Zadanie 51

Niech zakresem zmienności zmiennych jest zbiór liczb rzeczywistych. Zapisz za pomocą symboli logicznych oraz symboli $=, <, \leqslant, +, \cdot$ i $\mathbb{Q}$ następujące formuły:

1. kwadrat każdej liczby jest nieujemny,
2. liczba a jest ograniczeniem górnym zbioru A,
3. liczba a jest kresem górnym zbioru A,
4. pomiędzy dowolnymi dwoma różnymi liczbami rzeczywistymi istnieje liczba wymierna,
5. funkcja f jest malejąca.

Zadanie 52

Znajdź wykresy następujących formuł zmiennych x i y, o zakresie zmienności równym $\mathbb{R}^2$: $x = y$, $x < y$, $x \leqslant y$, $x \cdot y < 1$, $|x \cdot y| < 1$, $(x \leqslant 0) \vee (x = y)$, $x \cdot y < 1 \to x \cdot y = 1$.

Zadanie 53

Zapisz za pomocą kwantyfikatorów zdanie "g jest granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$".

1. Zastosuj prawa de'Morgana do uproszczenia negacji tego zdania.
2. Pokaż, że liczba 1 nie jest granicą ciągu $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Zadanie 54

Niech predykat $r(x, y)$ oznacza, że x jest rodzicem y, niech $m(x)$ oznacza, że x jest mężczyzną. Zdefiniuj za pomocą formuł r oraz m następujące formuły:

1. “x jest bratem y”
2. “x jest kuzynką y”
3. “x jest pradziadkiem y”

Zadanie 55

Dla każdej liczby rzeczywistej t niech $A_t = \{(x, tx) : x \in \mathbb{R}\}$. Niech $\mathcal{A} = \{A_t : t \in \mathbb{R}\}$. Wyznacz zbiór $\bigcup \mathcal{A}$.

Zadanie 56

Pokaż, że dla dowolnych dwóch rodzin zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ zachodzi równość $\bigcup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \bigcup \mathcal{A} \cup \bigcup \mathcal{B}$.

Zadanie 57

Załóż że Ω jest zbiorem skończonym i niech $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Pokaż, że

1. $(\forall x)(\forall y)\psi(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \psi(\omega_i, \omega_j)$,
2. $(\forall x)(\exists y)\psi(x, y) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} \psi(\omega_i, \omega_j)$,
3. $(\exists x)(\exists y)\psi(x, y) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} \psi(\omega_i, \omega_j)$,

Zadanie 58

Rozstrzygnij, który z graczy ma strategię zwycięską w grze „trzech zapałek” zaczynającą się od 30 zapałek. Opisz tę strategię.

* Zadanie 59

Pokaż, że jeśli $a, b \in A$ to $(a, b) \in \mathrm{P}(\mathrm{P}(A))$. Wykorzystaj tę obserwację do zdefiniowanie iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów A i B za pomocą operacji zbioru potęgowego oraz wyróżniania.

* Zadanie 60

Określmy następujące dwa kwantyfikatory stosowane do liczb naturalnych:

$$(\forall^\infty n)\psi(n) \leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n > k)\psi(n)$$

oraz

$$(\exists^\infty n)\psi(n) \leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(\exists n > k)\psi(n)\ .$$

1. Sformułuj i udowodnij prawa de Morgana dla tych kwantyfikatorów.
2. Pokaż, że dla dowolnej formuły ψ zdanie

   $$(\forall^\infty n)\psi(n) \rightarrow (\exists^\infty n)\psi(n)$$

   jest prawdziwe.
3. Sformułuj przy pomocy tych kwantyfikatorów pojęcie granicy ciągu oraz pojęcie punktu skupienia.
4. Bezpośrednio z własności tych kwantyfikatorów pokaż, że granica ciągu jest jego punktem skupienia.

Zadanie 61

Pokaż, że dla każdego zbioru A zachodzi równość $A = \bigcup \mathrm{P}(A)$.

* Zadanie 62

Niech zakresem zmienności zmiennych będzie zbiór liczb całkowitych. Zapisz za pomocą symboli logicznych oraz symboli $+$, $\cdot$ predykat „$x \geqslant 0$”.
Wskazówka: Zapoznaj się z twierdzeniem Lagrange'a o sumach czterech kwadratów.

*** Zadanie 63

Niech zakresem zmienności zmiennych będzie zbiór liczb naturalnych. Pokaż, że za pomocą symboli 0, 1, $+$ oraz $|$ można zdefiniować predykat „$x \cdot y = z$” (symbol $|$ oznacza podzielność bez reszty).

Wskazówka: Zdefiniuj najpierw predykat $(\exists y)(x = y^2)$. Przydać ci się mogą następujące tożsamości: $(x+y)^2 = x^2+xy+xy+y^2$, $NWD(x, x+1) = 1$ oraz $x^2+x = NWW(x, x+1)$, gdzie NWD oznacza największy wspólny dzielnik, NWW oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność.

Zadanie 64

Wymień wszystkie poznane do tej pory warianty praw de'Morgana.

G4: Relacje i funkcje

Zadanie 65

Podaj przykład relacji która jest symetryczna, ale nie jest zwrotna ani przechodnia.

Zadanie 66

Pokaż, że relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$. Pokaż, że relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{-1} = R$.

Zadanie 67

Niech $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$ oraz $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(x)\}$. Narysuj wykres relacji R, Q, $R \circ Q$ oraz $Q \circ R$.

Zadanie 68

Niech $R = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$. Wyznacz najmniejszą relację przechodnią na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ zawierającą relację R.

Zadanie 69

Niech $R = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x < y\}$.

1. Wyznacz relację $R \circ R$.
2. Wyznacz relację $R \circ R^{-1}$.
3. Wyznacz relację $R^{-1} \circ R$.

Zadanie 70

Wyznacz zbiory $\emptyset^\emptyset$, $X^\emptyset$ oraz $\emptyset^X$, gdzie X jest dowolnym zbiorem niepustym.

Zadanie 71

Niech f będzie funkcją różnowartościową. Pokaż, że wtedy dla dowolnych zbiorów A i B mamy $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$. Sformułuj i udowodnij twierdzenie odwrotne.

Zadanie 72

Niech f będzie funkcją. Pokaż, że następujące dwa zdania są równoważne:

1. $(\forall A, B)(f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B])$,
2. f jest injekcją

Zadanie 73

Niech $f : B \to C$ będzie funkcją. Pokaż, że następujące dwa zdania są równoważne:

1. f jest injekcją
2. $(\forall A)(\forall g, h : A \to B)(f \circ g = f \circ h \to g = h)$

Wskazówka: Własność (2) wykorzystuje się do zdefiniowania pojęcia monomorfizmu w Teorii Kategorii.

Zadanie 74

Niech $f : A \to B$ będzie funkcją. Pokaż, że następujące dwa zdania są równoważne:

1. f jest surjekcją (na B)
2. $(\forall C)(\forall g, h : B \to C)(g \circ f = h \circ f \to g = h)$

Wskazówka: Własność (2) wykorzystuje się do zdefiniowania pojęcia epimorfizmu w Teorii Kategorii.

Zadanie 75

Niech $f : A \to C$ będzie dowolną funkcją.

1. Pokaż, że istnieją (1) zbiór B; (2) surjekcja $g : A \to B$; (3) injekcja $h : B \to C$, takie że $f = h \circ g$.
2. Pokaż, że istnieją (1) zbiór B; (2) injekcja $g : A \to B$; (3) surjekcja $h : B \to C$, takie że $f = h \circ g$.

Zadanie 76

Niech f będzie funkcją i A dowolnym zbiorem. Pokaż, że $f \restriction A$ również jest funkcją oraz, że $\mathrm{dom}(f \restriction A) = \mathrm{dom}(f) \cap A$.

Zadanie 77

Niech f i g będą funkcjami. Pokaż, że $f \cup g$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f \restriction (\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)) = g \restriction (\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)) \ .$$

* Zadanie 78

Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolna rodziną funkcji. Pokaż, że $\bigcup \mathcal{F}$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall f, g \in \mathcal{F})(f \cup g \text{ jest funkcją}) \ .$$

Zadanie 79

Znajdź bijekcje pomiędzy następującymi parami zbiorów:

1. $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$,
2. $(0,1)$ i $(3,5)$,
3. $(0,1)$ i $\mathbb{R}$,
4. $(0,1)$ i $\mathbb{R}^+$,
5. $[0,1]$ i $[0,1)$.

Zadanie 80

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f((x,y)) = (x+y, x-y) \ .$$

Czy odwzorowanie f jest injekcją? Czy odwzorowanie f jest surjekcją? Znajdź $f[\mathbb{R} \times \{0\}]$, $f[L]$ oraz $f^{-1}[L]$, gdzie L jest prostą zadaną równaniem $y = x + 1$.

Zadanie 81

Niech $(A_t)_{t \in T}$ będzie rodziną zbiorów i niech f będzie funkcją. Pokaż, że

1. $f[\bigcup\limits_{t\in T} A_t] = \bigcup\limits_{t\in T} f[A_t]$,
2. $f[\bigcap\limits_{t\in T} A_t] \subseteq \bigcap\limits_{t\in T} f[A_t]$,
3. $f^{-1}[\bigcup\limits_{t\in T} A_t] = \bigcup\limits_{t\in T} f^{-1}[A_t]$,
4. $f^{-1}[\bigcap\limits_{t\in T} A_t] = \bigcap\limits_{t\in T} f^{-1}[A_t]$.

Zadanie 82

Ustalmy zbiór Ω. Funkcją charakterystyczną zbioru $A \subseteq \Omega$ nazywamy funkcję $\mathbf{1}_A$ określoną wzorem $\mathbf{1}_A = (A^c \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$. Dlaczego funkcję $\mathbf{1}_A$ nazywa się czasem mapą bitową zbioru A? Pokaż, że dla podzbiorów A, B przestrzeni Ω zachodzą następujące wzory: $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{A\cup B} = 1 - (1 - \mathbf{1}_A) \cdot (1 - \mathbf{1}_B)$

Zadanie 83

Niech $f : \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^{10} \to \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ będzie funkcją tożsamościowo równą $\mathbb{1}$. Zastosuj do funkcji f uniwersalną metodę wyznaczenia zdania φ takiego, że $f = F_\varphi$ i wyznacz jego długość uwzględniając ilość zmiennych zdaniowych, spójników i nawiasów.

Zadanie 84

Ile istnieje nierównoważnych formuł rachunku zdań zbudowanych ze zmiennych zdaniowych $p_1, \ldots, p_n$?
Wskazówka: Ile możesz zbudować różnych "tabelek zero-jedynkowych"dla n zmiennych zdaniowych?

Zadanie 85

Niech $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < n|x|\}$ oraz $B_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leqslant x \cdot y\}$. Wyznacz zbiory $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$ oraz $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} B_n$.

Zadanie 86

Niech $A_n = [-2 + (-1)^n, n)$. Oblicz $\bigcup\limits_n \bigcap\limits_{m>n} A_m$ oraz $\bigcap\limits_n \bigcup\limits_{m>n} A_m$.

Zadanie 87

Niech $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem zbiorów.

1. Pokaż, że $x \in \liminf_{n\in\mathbb{N}} F_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall^\infty n)(x \in F_n)$ oraz $x \in \limsup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\exists^\infty n)(x \in F_n)$ (patrz Zadanie 60).
2. Korzystając z powyższych obserwacji udowodnij, że

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq \liminf_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq \limsup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n .$$

3. Podaj przykład ciągu zbiorów $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dla którego wszystkie inkluzje w powyższym wzorze są właściwe.

Zadanie 88

Ustalmy zbiory A, B i C. Niech $A_{3n} = A$, $A_{3n+1} = B$ oraz $A_{3n+2} = C$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz $\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Kiedy ciąg $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny?

Zadanie 89

Załóżmy, że $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych. Pokaż, że wtedy $\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Zadanie 90

Niech $(A_{(i,j)})_{(i,j)\in I\times J}$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów. Pokaż, że

$$\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J} A_{i,j} = \bigcup_{f\in J^I} \bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}.$$

Zadanie 91

Załóżmy, że $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejącą rodziną zbiorów, czyli, że $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ oraz, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Pokaż, że wtedy

$$A_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n+1}).$$

* Zadanie 92

Funkcję logiczną $f : \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^n \to \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ nazywamy nazywamy monotoniczną jeśli zmiana dowolnego argumentu z $\mathbb{0}$ na $\mathbb{1}$ nie powoduje zmiany wartości funkcji z $\mathbb{1}$ na $\mathbb{0}$. Pokaż, że jeśli f jest monotoniczną funkcją logiczną, to jest ona funkcją stałą lub może zostać przedstawiona jako formuła zbudowana wyłącznie ze zmiennych oraz spójników $\land$ i $\lor$.

G5: Relacje równoważności

Zadanie 93

Na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ określamy relację $x \approx y \leftrightarrow (x - y \in \mathbb{Z})$.

1. Pokaż, że $\approx$ jest relacją równoważności
2. Wyznacz klasę abstrakcji $[\sqrt{2}]_{\approx}$.
3. Opisz klasę abstrakcji dowolnego elementu $a \in \mathbb{R}$.
4. Spróbuj samodzielnie uogólnić to zadanie.

Zadanie 94

Dla $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in [0,1]^2$ określamy relację

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \leftrightarrow u(x_1) = u(y_1) \wedge u(x_2) = u(y_2),$$

gdzie $u(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.
2. Wyznacz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 95

Pokaż, że następujące relacje są relacjami równoważności na zbiorze X i wyznacz ich klasy abstrakcji:

1. $X = \mathbb{N}^2$; $(x,y) \approx (a,b) \leftrightarrow x + y = a + b$,
2. $X = \mathbb{N}^2$; $(x,y) \approx (a,b) \leftrightarrow \max\{x,y\} = \max\{a,b\}$,
3. $X = \mathbb{R}$; $x \approx y \leftrightarrow (\exists t \neq 0)(tx = y)$,
4. $X = \mathbb{R}$; $x \approx y \leftrightarrow (\exists t > 0)(tx = y)$,
5. $X = \mathbb{R}^2$; $x \approx y \leftrightarrow (\exists t \neq 0)(tx = y)$,
6. $X = \mathbb{R}^2$; $x \approx y \leftrightarrow (\exists t > 0)(tx = y)$.

Zadanie 96

Jaka jest najmniejsza w sensie inkluzji relacja równoważności n zbiorze X? Jaka jest największa w sensie inkluzji relacja równoważności n zbiorze X?

Zadanie 97

Ile jest relacji równoważności na zbiorze $\{1,2,3\}$? Ile jest różnych rozbić zbioru $\{1,2,3,4\}$?

Zadanie 98

Na zbiorze $[0,8)^2$ określamy następującą relację równoważności

$$(a,b) \approx (c,d) \leftrightarrow [a] = [c] \wedge [b] = [d],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Niech

$$T = \{(n,m) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}^2 : 2 | n + m\}.$$

Narysuj zbiór

$$\bigcup_{(n,m)\in T} [(n,m)]_{\approx}.$$

Zadanie 99

Na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ określamy relacje $x \equiv y \leftrightarrow 3|(x + 2y)$ oraz $x \simeq y \leftrightarrow 5|x^2 - y^2$. Czy są to relacje równoważności?

Zadanie 100

Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy relacją równoważności $\approx$ formułą

$$(x, y) \approx (x', y') \leftrightarrow \max\{x, y\} = \max\{x', y'\} \ .$$

Ile elementów ma klasa abstrakcji $[(0, 20)]_{\approx}$?

Zadanie 101

Niech $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ będzie grupą oraz niech $H \subseteq G$ będzie podgrupą grupy $\mathcal{G}$. Na zbiorze G określamy relację $\sim_H$ wzorem

$$x \sim_H y \leftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

Pokaż, że $\sim_H$ jest relacją równoważności. Opisz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 102

Pokaż, że jeśli R i S są relacjami równoważności na zbiorze Ω, to również $R \cap S$ jest relacją równoważności na zbiorze Ω. Opisz klasy abstrakcji relacji $R \cap S$.

Zadanie 103

Pokaż, że przekrój dowolnej rodziny relacji równoważności na zbiorze X jest również relacją równoważności na zbiorze X. Wywnioskuj z tego, że dla każdej relacji $R \subseteq X \times X$ istnieje najmniejsza (w sensie inkluzji) relacja równoważności Q na zbiorze X taka, że $R \subseteq Q$.

Zadanie 104

Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określamy relacje R i S wzorami

$$(n, m)R(n', m') \leftrightarrow n = n'$$

oraz

$$(n, m)S(n', m') \leftrightarrow m = m' \ .$$

Wyznacz najmniejszą relację równoważności zawierającą relację $R \cup S$.

G6: Częściowe porządki

Zadanie 105

Pokaż, że $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ jest częściowym porządkiem. Znajdź w nim element najmniejszy. Znajdź elementy minimalne w częściowym porządku $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$.

Zadanie 106

Na zbiorze $X = \{10, 11, \ldots, 30\}$ określamy relację $(x \preceq y) \leftrightarrow (x|y)$. Wyznacz elementy maksymalne i minimalne w częściowym porządku $(X, \preceq)$.

Zadanie 107

Pokaż, że jeśli w częściowym porządku istnieje element największy, to jest on jedynym elementem największym i jest elementem maksymalnym.

Zadanie 108

Pokaż, że jeśli R i S sa częściowymi porządkami, to ich przekrój $R \cap S$ też jest częściowym porządkiem. Czy ich suma $R \cup S$ musi być częściowym porządkiem?

Zadanie 109

Niech R będzie częściowym porządkiem na zbiorze X. Niech $Y \subseteq X$ oraz $S = R \cap (Y \times Y)$. Pokaż, że S jest częściowym porządkiem na zbiorze Y.

Zadanie 110

Dla danych liczb $n, m \in \mathbb{N}$ podaj przykład częściowego porządku który ma dokładnie n elementów minimalnych oraz m elementów maksymalnych.

Zadanie 111

Podaj przykład częściowego porządku który ma dokładnie jeden element maksymalny oraz nie ma elementu największego.

Zadanie 112

Niech (X, R) będzie częściowym porządkiem. Pokaż, że relacja R^{-1} jest również częściowym porządkiem na zbiorze X. Jakie są związki pomiędzy elementami maksymalnymi, minimalnymi, największymi i najmniejszymi w tych dwóch częściowych porządkach?

Zadanie 113

Niech $(X, \preceq)$ będzie liniowym porządkiem. Pokaż, że jeśli $a \in X$ jest elementem $\preceq$–maksymalnym, to a jest również elementem $\preceq$–największym.

Zadanie 114

Pokaż, że nie istnieje liniowy porządek $\preceq$ na zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ o następujących własnościach:

1. $(\forall a, b, x, y \in \mathbb{C})\,((a \preceq b) \land (x \preceq y) \rightarrow a + x \preceq b + y)$,
2. $(\forall a, b \in \mathbb{C})((0 \preceq a) \land (0 \preceq b) \rightarrow 0 \preceq a \cdot b)$.

Zadanie 115

Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem. Pokaż, że częściowe porządki $(P(A), \subseteq)$ i $(\{0,1\}^A, \leqslant^*)$, gdzie $f \leqslant^* g \leftrightarrow (\forall a \in A)(f(a) \leqslant g(a))$, są izomorficzne.

Zadanie 116

Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ rozważamy relację $\preceq$ zadaną formułą

$$((x, y) \preceq (x'y')) \leftrightarrow (x \leqslant x') \land (y \leqslant y') \ .$$

Niech $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

1. Pokaż, że relacja $\preceq$ jest częściowym porządkiem.
2. Wyznacz elementy minimalne zbioru K.
3. Dla ustalonego punktu $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ wyznacz zbiory $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) \leqslant (x, y)\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \leqslant (a, b)\}$ oraz $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \neg((a, b) \leqslant (x, y)) \land \neg((x, y) \leqslant (a, b))\}$.

Zadanie 117

Niech $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leqslant 1\}$. Na zbiorze K określamy relację

$$(x, y) \preceq (x', y') \leftrightarrow ((x < x') \lor (x = x' \land y \leqslant y'))\ .$$

Pokaż, że $\preceq$ jest liniowym porządkiem na zbiorze K oraz wyznacz elementy minimalne w tym porządku.

Zadanie 118

Rozważmy częściowy porządek $(\mathbb{R}, \leqslant)$. Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ będą zbiorami ograniczonymi. Pokaż, że $\inf(A) = -\sup(\{-a : a \in A\})$ oraz $\sup(\{a + b : a \in A \land b \in B\}) = \sup(A) + \sup(B)$.

Zadanie 119

Niech $\Omega = \{a, b\}$ oraz niech X będzie zbiorem wszystkich słów z Ω^* długości nie większej niż 3. Wypisz elementy tego zbioru w porządku leksykograficznym.

Zadanie 120

Niech Ω będzie niepustym zbiorem. Na zbiorze słów Ω^* definiujemy relację $\sigma \approx \eta \leftrightarrow |\sigma| = |\eta|$, gdzie $|x|$ oznacza długość słowa x. Pokaż, że $\approx$ jest relacją równoważności. Wyznacz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 121

Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje zbiór liczb naturalnych T taki, że częściowe porządki $(P(\{1, .., n\}), \subseteq)$ oraz $(T, |)$ są izomorficzne

Zadanie 122

Niech $L(\{p\})$ oznacza zbiór wszystkich zdań zbudowanych z jednej zmiennej zdaniowej p. Na zbiorze $L(\{p\})$ określamy relację $\varphi \leqslant \psi \leftrightarrow \models (\varphi \to \psi)$. Pokaż, że $\leqslant$ jest preporządkiem. Niech $\equiv$ będzie relacją równoważności wyznaczoną przez ten preporządek oraz niech $\preceq$ będzie częściowym porządkiem na $L(\{p\})/\equiv$ wyznaczonym przez $\leqslant$. Pokaż, że porządek $(L(\{p\})/\equiv, \leqslant)$ jest izomorficzny z porządkiem $P(\{0, 1\})$.

* Zadanie 123

Załóżmy, że $(X, \leqslant)$ jest dobrym porządkiem o następujących własnościach: nie ma w nim elementu największego, dla każdego elementu, z wyjątkiem najmniejszego, istnieje element bezpośrednio go poprzedzający. Pokaż, że porządek $(X, \leqslant)$ jest izomorficzny z liczbami naturalnymi z naturalnym porządkiem.

Zadanie 124

Niech $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb naturalnych. Pokaż, że istnieją liczby $n, m \in \mathbb{N}$ takie, że $n < m$ oraz $x_n \leqslant x_m$ i $y_n \leqslant y_m$.

* Zadanie 125

Podaj przykład injekcji $f : \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$.

Wskazówka: Poszukaj funkcji f postaci $f(x, y) = g(x)+\sigma+y$, gdzie $+$ oznacza konkatenację ciągów oraz gdzie σ jest pewnym ciągiem skończonym.

G7: Aksjomat Wyboru

Zadanie 126

Na zbiorze $X = \mathbb{R}^2$ rozważamy relację równoważności określoną wzorem $x \approx y \leftrightarrow (\exists t \neq 0)(tx = y)$ (patrz Zadanie 95). Znajdź jakiś naturalny (prosty do opisania) selektor rodziny $X/\approx$.

Zadanie 127

Na zbiorze $\mathbb{R}$ rozważamy relację określoną wzorem $x \approx y \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że jest to relacja równoważności oraz znajdź jakiś naturalny selektor rodziny $\mathbb{R}/\approx$.

Zadanie 128

Załóżmy, że $f : A \to B$ jest surjekcją. Pokaż, korzystając z Aksjomatu Wyboru, że istnieje taka funkcja $g : B \to A$, że $(\forall y \in B)(f(g(y)) = y)$.

Zadanie 129

W którym momencie dowodu równoważności definicji Heinego i Cauchy'ego ciągłości funkcji korzystamy z Aksjomatu Wyboru?

** Zadanie 130

Pokaż, że w każdej przestrzeni liniowej istnieje baza.
Wskazówka: skorzystaj z Lematu Kuratowskiego Zorna.

Zadanie 131

Znajdź liniowy porządek $\preceq$ na zbiorze $\mathrm{P}(\{a, b, c\})$ taki, że

$$(\forall X, Y \in \mathrm{P}(\{a, b, c\}))(X \subseteq Y \to X \preceq Y) \ .$$

** Zadanie 132

Pokaż, korzystając z Lematu Kuratowskiego-Zorna, że każdy częściowy porządek można rozszerzyć do porządku liniowego.

Zadanie 133

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną niepustych, parami rozłącznych podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Pokaż, bez pomocy Aksjomatu Wyboru, że rodzina $\mathcal{A}$ ma selektor.

G8: Indukcja Matematyczna

Zadanie 134

Wyznacz moc zbioru $A = \{k \in \{1, \ldots, 1000\} : 2|k \lor 5|k\}$.

Zadanie 135

Uogólnij wzór $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na trzy i cztery zbiory.

* Zadanie 136

Uogólnij wzór $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na dowolną skończoną ilość zbiorów.

Zadanie 137

Niech $\mathcal{A} = \{A \in P(\{1,\dots,10\}) : 2 \leqslant |A| \leqslant 7\}$. Ile jest elementów minimalnych oraz ile jest elementów maksymalnych w częściowym porządku $(\mathcal{A}, \subseteq)$?

Zadanie 138

Pokaż, że w każdym skończonym częściowym porządku istnieje element maksymalny.

Zadanie 139

Pokaż, że jeśli skończony porządek ma tylko jeden element maksymalny, to jest on elementem największym.

Zadanie 140

Pokaż, że jeśli każdy skończony porządek można rozszerzyć do porządku liniowego. Podaj oszacowania na liczbę tych rozszerzeń.

Zadanie 141

Niech $A = \{1,\dots,n\} \times \{0,1\}$ oraz $R = \{((x,0),(x,1) : 1 \leqslant x \leqslant n\} \cup id_A$. Na ile sposobów można rozszerzyć relację R do liniowego porządku?

Zadanie 142

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona wyznacz następujące sumy:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}, \ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}, \ \sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i}, \ \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} .$$

Wskazówka: Do wyznaczenia ostatniej sumy możesz skorzystać z tego, że $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$.

Zadanie 143

Za pomocą formuły Stirlinga $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ oszacuj liczbę $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x.

Zadanie 144

Pokaż, że jeśli $f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ jest injekcją, to funkcja f jest również surjekcją. Pokaż, że jeśli $f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ jest surjekcją, to funkcja f jest również injekcją.

Zadanie 145

Ile jest waluacji $\pi : \{p_0, p_1, \dots, p_{10}\} \to \{0,1\}$ takich, że $\pi \models p_0 \to (p_1 \wedge \dots \wedge p_{10})$?

Zadanie 146

Wyznacz liczbę przekątnych w n-kącie wypukłym.

Zadanie 147

Ile jest relacji zwrotnych, symetrycznych, słabo antysymetrycznych na zbiorze n elementowym?

Zadanie 148

Ile jest relacji które są jednocześnie zwrotne i symetryczne na zbiorze $\{1, 2, ..., n\}$?

Zadanie 149

Relację R nazywamy *antysymetryczną*, jeśli

$$(\forall x, y)((x, y) \in R \rightarrow (x, y) \notin R) \ .$$

Ile jest relacji antysymetrycznych na zbiorze n - elementowym?

Zadanie 150

Relację R nazywamy *żałosną*, jeśli

$$(\forall x, y)((x, y) \in R \rightarrow x = y) \ .$$

Ile jest relacji żałosnych na zbiorze n - elementowym?

Zadanie 151

Niech $S = \{X \subseteq \{1, ..., 9\} : 2||X|\}$. Jaka jest moc rodziny zbiorów S ?

Zadanie 152

Pokaż, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku 2 rozmieścimy dowolnie pięć punktów, to dwa z nich są odległe nie więcej niż o 1.
Wskazówka: Zastosuj zasadę szufladkową Dirichleta

Zadanie 153

Pokaż, że w każdej szóstce liczb ze zbioru $\{1, ..., 10\}$ istnieją dwie liczby których suma jest nieparzysta.
Wskazówka: Przyjrzyj się rozbiciu $\{1, ..., 10\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Zadanie 154

Niech $x_1, \ldots, x_n$ będzie ciągiem liczb całkowitych. Pokaż, że suma pewnej liczby kolejnych wyrazów tego ciągu jest podzielna przez liczbę n.
Wskazówka: Rozważ liczby $s_k = (x_1 + \ldots + x_k) \mod n$.

Zadanie 155

Czy szachownicę z usuniętymi naprzeciwległymi narożnikami można pokryć kostkami domina o powierzchni równej dwóm kwadratom szachownicy?
Wskazówka: Pomaluj rozsądnie szachownicę

Zadanie 156

Pokaż, że istnieje potęga liczby 3, której rozwinięcie dziesiętne kończy się cyframi 001.
Wskazówka: Rozważ ciąg liczb $a_n = 3^n \mod 10^3$

Zadanie 157

Niech $A \subseteq \{1, 2, ..., 2n\}$ będzie zbiorem o mocy $|A| > n$. Pokaż, że istnieją dwie różne liczby $a, b \in A$ takie, że a dzieli b.
Wskazówka: Rozważ funkcję $f(x) = \max\{k : k|x \wedge \neg(2|k)\}$.

** Zadanie 158 (*Erdős–Szekeres*)

Niech $x_1, \ldots, x_{mn+1}$ będzie ciągiem różnych liczb rzeczywistych. Pokaż, że z ciągu tego można wybrać podciąg rosnący długości $m + 1$ lub podciąg malejący długości $n + 1$.
Wskazówka: Każdej liczbie $k \in \{1, \ldots, nm + 1\}$ przyporządkuj parę liczb (a_k, b_k), gdzie a_k = długość najdłuższego rosnącego podciągu kończącego się w x_k zaś b_k = długość najdłuższego malejącego podciągu kończącego się w x_k.

Zadanie 159

Niech $\mathcal{A}$ będzie skończoną rodziną niepustych, parami rozłącznych zbiorów. Pokaż, bez pomocy Aksjomatu Wyboru, że rodzina $\mathcal{A}$ ma selektor.

Zadanie 160

Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie skończoną rodziną niepustych, parami rozłącznych skończonych zbiorów. Wyznacz moc zbioru wszystkich selektorów rodziny $\mathcal{A}$.

Zadanie 161

Pokaż, że dowolne dwa skończone liniowe porządki o tej samej liczbie elementów są izomorficzne.

G9: Teoria mocy

Zadanie 162

Pokaż za pomocą indukcji matematycznej, że $n < 2^n$ dla każdej liczby naturalnej n. Udowodnij ten sam fakt bez korzystanie z indukcji matematycznej.

Zadanie 163

Znajdź bijekcję pomiędzy następującymi parami zbiorów:

1. $(-\pi/2, \pi/2)$ i $\mathbb{R}$,
2. $(0, 1)$ i $(2, 5)$,
3. $(0, \infty)$ i $\mathbb{R}$,
4. $[0, 1]$ i $[0, 1)$.

Zadanie 164

Pokaż, że każdy niezdegenerowany odcinek prostej rzeczywistej jest mocy continuum. Pokaż, że każdy niezdegenerowany trójkąt na płaszczyźnie jest mocy continuum.

Zadanie 165

Niech $\mathrm{Sym}(A)$ oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru A. Pokaż, że jeśli $|A| = |B|$ to $|\mathrm{Sym}(A)| = |\mathrm{Sym}(B)|$.

Zadanie 166

Pokaż, że zbiór punktów płaszczyzny o obu współrzędnych wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.

Zadanie 167

Pokaż, że dowolna rodzina parami rozłącznych odcinków liczb rzeczywistych jest przeliczalna.
Wskazówka: Skorzystaj z tego, że liczby wymierne są gęste w zbiorze liczb rzeczywistych oraz, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny.

Zadanie 168

Pokaż, że dowolna rodzina parami rozłącznych niepustych kółek na płaszczyźnie jest przeliczalna.

Zadanie 169

Pokaż, że $n \cdot \aleph_0 = (\aleph_0)^n = \aleph_0$ dla każdej liczby naturalnej $n > 0$. Wyznacz liczbę $\aleph_0^{\aleph_0}$.

Zadanie 170

Jaka jest moc zbioru wszystkich ciągów liczb rzeczywistych zbieżnych do zera? Jaka jest moc zbioru wszystkich ciągów liczb całkowitych zbieżnych do zera?

Zadanie 171

Pokaż, że zbiór wszystkich funkcji ciągłych z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste jest mocy continuum.
Wskazówka: Pokaż, że jeśli $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są takimi funkcjami ciągłymi, że $f \restriction \mathbb{Q} = g \restriction \mathbb{Q}$ to $f = g$.

Zadanie 172

Pokaż, że zbiór wszystkich bijekcji ze zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb naturalnych jest mocy continuum.

Zadanie 173

Jaka może być moc zbioru $A \setminus B$ jeśli A i B są zbiorami mocy $\aleph_0$? Jaka może być moc zbioru $A \setminus B$ jeśli A i B są zbiorami mocy $\mathbf{c}$?

Zadanie 174

Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pokaż, że $|\mathrm{rng}(f)| = \aleph_0$ lub istnieje taka liczba naturalna n, że $|f^{-1}(n)| = \aleph_0$.

Zadanie 175

Jaka jest moc zbioru $\{X \subset \mathbb{N} : |X| < \aleph_0\}$? Jaka jest moc zbioru $\{X \subset \mathbb{R} : |X| < \aleph_0\}$? Jaka jest moc zbioru $\{X \subset \mathbb{R} : |X| \leqslant \aleph_0\}$?

* Zadanie 176

Oblicz $\kappa + \lambda$, $\kappa * \lambda$ oraz κ^λ dla dowolnych $\kappa, \lambda \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0, \mathfrak{c}, 2^{\mathfrak{c}}\}$.

Zadanie 177

Niech $\beth_0 = \aleph_0$ oraz $\beth_{n+1} = 2^{\beth_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

1. Pokaż, że $\beth_0 < \beth_1 < \beth_2 < \ldots$
2. Niech $\beth_\omega = \sum_{n \geqslant 0} \beth_n$. Pokaż, że
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\beth_n < \beth_\omega)\ .$$
3. Spróbuj zdefiniować samodzielnie liczby $\beth_{\omega+1}, \beth_{\omega+2}, \ldots, \beth_{\omega+\omega}$

* Zadanie 178

Jaka jest moc zbioru $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$?
Wskazówka: Zapoznaj się z pojęciem "pierwotnych trójek pitagorejskich".

* Zadanie 179

Ile można narysować parami rozłącznych liter "L" na płaszczyźnie?. Ile można narysować parami rozłącznych liter "T" na płaszczyźnie?

* Zadanie 180

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczna. Pokaż, że zbiór punktów nieciągłości funkcji f jest przeliczalny.

Wskazówka: Oznacz przez T zbiór punktów nieciągłości funkcji f i rozważ rodzinę odcinków

$$I_t = (\lim_{x \to t-} f(x), \lim_{x \to t+} f(x))$$

dla $t \in T$.

*** Zadanie 181 (*Cantor*)

Liniowy porządek $(L, \leqslant)$ nazywamy gęstym, jeśli

$$(\forall a, b \in L)(a < b \to (\exists c \in L)(a < c < b)).$$

Pokaż, że każdy przeliczalny liniowy gęsty porządek bez elementu największego i najmniejszego jest izomorficzny z porządkiem $(\mathbb{Q}, \leqslant)$.

** Zadanie 182 (*Sierpinski*)

Niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolną rodziną zbiorów mocy $\aleph_0$. Pokaż, że istnieje rodzina nieskończonych, parami rozłącznych zbiorów $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taka, że $B_n \subseteq A_n$ dla wszystkich n. Uwaga: Prawdziwa jest pewien wariant tego twierdzenia dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej

** Zadanie 183

Niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolną rodziną nieskończonych podzbiorów zbiorów $\mathbb{N}$. Pokaż, że istnieje taki podzbiór S zbioru $\mathbb{N}$, że

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|A_n \cap S| = |A_n \setminus S| = \aleph_0).$$

* Zadanie 184

Niech $\{f_n : n \in N\}$ będzie dowolną rodziną funkcji ze zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Znajdź taką funkcję $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taką, że $(\forall n)(\forall^{\infty} k)(f_n(k) < g(k))$ (kwantyfikator $\forall^{\infty}$ został zdefiniowany w zadaniu 60).

* Zadanie 185

Dla zbiorów $A, B \in P(\mathbb{N})$ określamy relację

$$A \subseteq^* B \leftrightarrow |A \setminus B| < \aleph_0 \ .$$

Pokaż, że $\subseteq^*$ jest preporządkiem. Załóżmy, że $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest taką rodziną nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, że $(\forall n \in \mathbb{N})(A_{n+1} \subseteq^* A_n)$. Pokaż, że istnieje taki nieskończony podzbiór B zbioru liczb naturalnych, że $(\forall n \in \mathbb{N})(B \subseteq^* A_n)$.

** Zadanie 186

Pokaż, że istnieje rodzina $\mathcal{A}$ nieskończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych mocy continuum taka, że dla dowolnych dwóch różnych $A, B \in \mathcal{A}$ przekrój $A \cap B$ jest skończony. Wskazówka: Skorzystaj z tego, że zbiór liczb wymiernych jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

* Zadanie 187

Pokaż, korzystając z Aksjomatu Wyboru, że jeśli A jest zbiorem nieskończonym (czyli, że $(\forall n \in \mathbb{N})(\neg|A| = n)$), to istnieje injekcja $f : \mathbb{N} \to A$.

*** Zadanie 188 (*Ramsey*)

Niech $R \subseteq \mathbb{N}^2$ będzie relacją symetryczną. Pokaż, że istnieje nieskończony podzbiór A zbioru $\mathbb{N}$ taki, że $(\forall x, y \in A)(x \neq y \to (x, y) \in R)$ lub istnieje nieskończony podzbiór A zbioru $\mathbb{N}$ taki, że $(\forall x, y \in A)(x \neq y \to (x, y) \notin R)$.

Zadanie 189

Pokaż, że z każdego nieskończonego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać nieskończony podciąg monotoniczny.

G10: Elementy Teorii Kategorii

Zadanie 190

Które z następujących struktur są monoidami?

1. $([0, 1], 0, \vee)$, gdzie $x \vee y = \max\{x, y\}$
2. $([0, 1], 1, \wedge)$, gdzie $x \wedge y = \min\{x, y\}$
3. $((0, \infty), 1, \star)$, gdzie $x \star y = x^y$
4. $(X^X, \mathrm{Id}_x, \circ)$ (X jest ustalonym zbiorem)
5. $(X^*, [], ++)$, (gdzie X jest ustalonym zbiorem)

Zadanie 191

Pokaż, że strzałka Id_A jest jednoznaczna, czyli, że jeśli $\mathrm{Id}1_A$ oraz $\mathrm{Id}2_A$ spełniają własności identyczności to $\mathrm{Id}1_A = \mathrm{Id}2_A$.

Zadanie 192

Pokaż, że złożenie monomorfizmów jest monomorfizmem.

Zadanie 193

Pokaż, że złożenie epimorfizmów jest epimorfizmem. Spróbuj podać proste uzasadnienie tego faktu oparte o poprzednie zadanie wykorzystujące pojęcie kategorii dualnej.

Zadanie 194

Pokaż, że jeśli $f : A \to B$ jest izomorfizmem, to odwrotność f^{-1} jest wyznaczona jednoznacznie.

Zadanie 195

Pokaż, że jeśli f^{-1} jest odwrotnością $f : A \to B$ i g^{-1} jest odwrotnością $g : B \to C$, to $f^{-1} \circ g^{-1}$ jest odwrotnością $g \circ f : A \to C$.

Zadanie 196

Podaj przykład kategorii ze strzałką która jest monomorfizmem oraz epimorfizmem, ale nie jest izomorfizmem.

Zadanie 197

Rozważamy kategorię zbudowaną z częściowego porządku $(X, \leqslant)$. Kiedy istnieją w niej elementy początkowe i końcowe?

Zadanie 198

Pokaż, że jeśli w diagramie

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"'] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd}$$

komutują wewnętrzne kwadraty, to również komutuje zewnętrzny kwadrat.

Zadanie 199

Zinterpretuj w języku informatyki komutowanie następującego diagramu

$$\begin{tikzcd} Int \arrow[r, "succ_{Int}"] \arrow[d, "toReal"'] & Int \arrow[d, "toReal"] \\ Real \arrow[r, "succ_{Real}"'] & Real \end{tikzcd}$$

Zadanie 200

Pokaż, że obiekty końcowe (terminalne) w ustalonej kategorii są wyrażone jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Pokaż podobną własność obiektów początkowych.

Zadanie 201

Wyznacz obiekty końcowe i początkowe w następujących kategoriach:

1. w kategorii grup **Grp**
2. w kategorii ciał
3. w kategorii częściowych porządków **Pos**
4. w kategorii monoidów **Mon**
5. **Set** $\times$ **Set**
6. $\mathbf{Set}^{\to}$

Zadanie 202

Pokaż, że produkt $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu w kategorii **Set**.
Wskazówka: Skorzystaj z jednoznaczności mediatora w definicji produktu.

Zadanie 203

Pokaż, że jeśli $\mathcal{C}$ jest kategorią, to $\mathcal{C}^{op}$ też jest kategorią.
Wskazówka: Jak w kategorii $\mathcal{C}^{op}$ definiuje się złożenie morfizmów?

Zadanie 204

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Na zbiorze G określamy działanie $a \star b = b \cdot a$

1. Pokaż, że $(G\star)$ jest grupą.

2. Znajdź izomorfizm między grupami $(G, \cdot)$ oraz $(G, \star)$.
3. Jaki ma związek to zadanie z konstrukcją $\mathcal{C}^{op}$?

Zadanie 205

Zapisz w języku diagramów komutujących (przemiennych) łączność operacji złożenia funkcji.

Zadanie 206

Niech $(G, \cdot)$, $(H, \star)$ będą grupami oraz niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem. Wiadomo, że grupa ilorazowa $G/\ker(f)$ jest izomorficzna z podgrupą $\mathrm{img}(f)$ grupy H. Zapisz to w języku przemiennych diagramów.

Zadanie 207

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią z produktem. Dla $f : X \to A$ oraz $g : Y \to B$ niech $\langle f, g\rangle$ będzie strzałką mediacyjną dla produktu $A \times B$. Pokaż, że $\langle f \circ h, g \circ h\rangle = \langle f, g\rangle \circ h$.

** Zadanie 208

Rozważamy kategorię **Mon** (monoidów). Pokaż, że funkcja $f : (\mathbb{N}, 0, +) \to (\mathbb{Z}, +, +)$ określona wzorem $f(x) = x$ (czyli identyczność na $\mathbb{N}$ traktowana jako morfizm z $(\mathbb{N}, 0, +)$ do $(\mathbb{Z}, 0, +)$) jest epimorfizmem.

Zadanie 209

Ustalmy zbiór Ω. Rozważmy kategorię $\mathcal{P}(\Omega)$ której obiektami są wszystkie podzbiory zbioru Ω, zaś morfizmy oznaczają zawieranie zbiorów. Niech $A, B \subseteq \Omega$.

1. Wyznacz $A \times B$ w tej kategorii
2. Wyznacz $A + B$ w tej kategorii.

* Zadanie 210

Rozważmy takie przyporządkowanie $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$

$$F(X) = \begin{cases} \emptyset & : |X| < \aleph_0 \\ \mathbb{N} & : |X| \geqslant \aleph_0 \end{cases}$$

Pokaż, że F nie można rozszerzyć do funktora.

* Zadanie 211

Sprawdź, że następujące przyporządkowania są endofunktorami kategorii **Set** oraz zaproponuj dla nich odwzorowania $\eta_X : X \to F(X)$ i $\mu_X : F(F(X)) \to F(X)$:

1. $F(X) = X \times X$; $F(f : X \to Y)(x, y) = (f(x), f(y)$
2. (Reader) $R_A(X) = X^A$; $R(f : X \to Y)(\phi) = f \circ \phi$
3. (Writer) $W_{\mathcal{M}}(X) = M \times X$; $W_{\mathcal{M}}(f : X \to Y) = id_M \times f$, gdzie $\mathcal{M} = (M, e, \star)$ jest ustalonym monoidem
4. (State) $S_A(X) = (A \times X)^A$; $S_A(f : X \to Y)(\phi) = (\lambda a)(\text{let } (b, y) = \phi(a) \text{ in } (b, f(y)))$
5. (Maybe) $M(X) = X \cup \{\uparrow_X\}$; $F(f : X \to Y) = f \cup \{(\uparrow_X, \uparrow_Y)\}$
6. (Niedeterminizm) $N(X) = \{Y \subseteq X : |Y| < \aleph_0\}$; $N(f : X \to Y)(A) = f[A]$

Odwzorowania η oraz μ muszą posiadać te same własności co ich odpowiedniki dla funktora `List`, czyli $\mu_X \circ \eta_{F(X)} = id_{F(X)}$, $\mu_X \circ F(\eta_X) = id_{F(X)}$ oraz $\mu_X \circ \mu_{F(X)} = \mu \circ F(\mu)$.

G11: Elementy Teorii Modeli

Zadanie 212

Wyznacz wartość termu $\tau = 1 + (1 + (1 + (1 + 1)))$ w pierścieniach $\mathbb{Z}_n$ dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Zadanie 213

Czy $(\mathbb{N}, \leqslant) \equiv (\mathbb{Z}, \leqslant)$?

Zadanie 214

Niech $Th(\mathfrak{a}) = \{\phi \in Sent : \mathfrak{a} \models \phi\}$. Pokaż, że $Th(\mathfrak{a})$ jest teorią niesprzeczną i zupełną.

Zadanie 215

Znajdź zdania ϕ_n i ψ_n takie, że

1. ϕ_n jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy model ma moc większą lub równą n,
2. ψ_n jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy model ma moc równą n.

Zadanie 216

Pokaż, że jeśli dwie struktury są izomorficzne, to są elementarnie równoważne.

Zadanie 217

Pokaż, że

1. $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}$,
2. $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}$,
3. $(\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}) \wedge (\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{c}) \to (\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{c})$

Zadanie 218

Niech PO oznacza teorię częściowych porządków z predykatem binarnym R.

1. Pokaż, że $PO \models (\forall x)((\forall y)(R(y, x) \to (\forall y)(R(x, y) \to y = x))$
2. Niech $\phi = (\forall x, y)(R(x, y) \vee R(y, x))$. Pokaż, że zdanie ϕ jest niezależne od teorii PO.
3. Niech $LO = PO \cup \{(\forall x, y)(R(x, y) \vee R(y, x))\}$. Pokaż, że teoria LO jest kategoryczna w każdej mocy skończonej. Czy LO jest kategoryczna w mocy $\aleph_0$?
4. Niech
   $$DLO = LO \cup \{(\forall x, y)((R(x, y) \wedge x \neq y) \to (\exists z)(R(x, z) \wedge R(z, y) \wedge x \neq z \wedge z \neq y))\}$$
   Pokaż, że jeśli $(A, \mathbf{R}) \models DLO$ oraz $|A| > 1$ to $|A| \geqslant \aleph_0$.
5. Czy DLO jest kategoryczna w mocy $\aleph_0$?
6. Niech
   $$DLO^* = DLO \cup \{\neg(\exists x)(\forall y)R(y, x), \neg(\exists x)(\forall y)(R(x, y)\} \ .$$
   Pokaż, że DLO^* jest kategoryczna w mocy $\aleph_0$

7. Ile nieizomorficznych modeli ma teoria DLO w mocy $\aleph_0$?

Zadanie 219

Pokaż, że jeśli $\mathfrak{a}$ jest strukturą skończoną o skończonej sygnaturze, to $Th(\mathfrak{a})$ jest zbiorem rozstrzygalnym.

Powodzenia,
Jacek Cichoń