Analiza I

Definicje, wzory, fakty

WPPT PWr

Liczby rzeczywiste

Arytmetyka

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
3. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Sumy

1. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. Jeśli $q \neq 1$ to $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Nierówności

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(n < 2^n)$
2. $|x+y| \leq |x| + |y|$
3. Nierówność trójkąta: $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$
4. Bernoulli: $(\forall x \geq -1)(\forall n \in \mathbb{N})\left((1+x)^n \geq 1 + nx\right)$
5. Cauchy: $|\sum_{n=1}^{k} a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{k} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{k} b_n^2}$

Wzór dwumianowy

Def. $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ **Def.** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Podstawowe własności: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Tw. [Wzór dwumianowy] $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Ciągi

Def. $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(|a_n - g| < \epsilon)$$

Def. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall C)(\exists N)(\forall n > N)(a_n > C)$$

Jeśli $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ oraz istnieje takie n_0, że $b_n = a_n$ dla wszystkich $n \geq n_0$ to $\lim_{n\to\infty}(b_n) = a$.

Podstawowe granice

1. $\lim_{n\to\infty} c = c$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
3. $\lim_{n\to\infty} n = \infty$
4. Dla każdej ustalonej liczby naturalnej k mamy $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$
5. Jeśli $|q| < 1$ to $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$
6. Jeśli $q > 1$ to $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$
7. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
8. Dla każdej ustalonej liczby rzeczywistej a mamy $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n = e^a$

UWAGA: $e = 2.71828182845904523536028747 13\ldots$

Tw. Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne to

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
3. jeśli $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$
4. jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ to $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Tw. [O trzech ciągach] Jeśli istnieje takie n_0, że $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla wszystkich $n \geq n_0$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$ to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Tw. Jeśli istnieje takie n_0, że $a_n \leq b_n$ dla wszystkich $n \geq n_0$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ to $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Punkty skupienia

Def. Liczba g jest punktem skupienia ciągu (a_n) jeśli $(\forall \varepsilon > 0)(\forall N)(\exists n > N)(|a_n - g| < \varepsilon)$

Tw. g jest punktem skupienia ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pociąg ciągu (a_n) zbieżny do g

Def. $g = \limsup_{n\to\infty} a_n$ jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że $(\forall n > N)(a_n < g + \varepsilon)$ oraz $(\forall \varepsilon > 0)(\forall N)(\exists n > N)(a_n > g - \varepsilon)$

Tw. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup\{g : g \text{ jest punktem skupienia } (a_n)\}$

Notacja "Duże O"

Def. $(a_n) = O((b_n))$ jeśli istnieje $C > 0$ oraz N takie, że $(\forall n > N)(|a_n| \leq C|b_n|)$

Tw. $(a_n) = O((b_n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_n}{b_n}| < \infty$.

Wn. Jeśli $\lim_n |\frac{a_n}{b_n}| < \infty$ to $(a_n) = O((b_n))$

Def. $(a_n) = \Theta((b_n))$ jeśli $(a_n) = O((b_n))$ i $(b_n) = O((a_n))$

Granica funkcji

Def. $\lim_{x\to a} f(x) = g$ jeśli dla dowolnego ciągu (a_n) takiego, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $(\forall n)(a_n \neq a)$ mamy $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g$.

Tw. Jeśli istnieją granice $\lim_{x\to a} f(x)$ i $\lim_{x\to a} g(x)$ to

1. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
3. jeśli $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ to $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Tw. Jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = b$ oraz $\lim_{y\to b} g(y) = c$ to $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Tw. $\lim_{x\to a} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - g| < \epsilon)$$

Różne warianty granicy.

Def. $\lim_{x\to a+} f(x) = g$ jeśli dla dowolnego ciągu (a_n) takiego, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $(\forall n)(a_n > a)$ mamy $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g$.

Def. $\lim_{x\to a-} f(x) = g$ jeśli dla dowolnego ciągu (a_n) takiego, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $(\forall n)(a_n < a)$ mamy $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g$.

Def. $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ jeśli dla dowolnego ciągu (a_n) takiego, że $\lim_n a_n = \infty$ mamy $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g$.

Funkcje elementarne

Funkcje trygonometryczne

1. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
2. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
3. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
4. $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

Funkcja wykładnicza

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$

Logarytm

Def. Jeśli $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $x > 0$ to

$$(\log_a(x) = y) \Leftrightarrow (a^y = x)$$

Def. [logarytm naturalny] $\ln(x) = \log_e(x)$

Podstawowe własności:

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a(x^y) = y\log_a(x)$
3. $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
4. $\log_a(a) = 1$

Funkcje ciągłe

Def. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest **ciągła** w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Tw. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a jeśli

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Def. Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła jeśli jest ciągła w każdym punkcie zbioru A.

Podstawowe własności funkcji ciągłych.

1. Suma, różnica, iloczyn oraz iloraz dwóch funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
2. Wszystkie wielomiany są ciągłe.
3. Jeśli f jest ciągła to również $|f|$ jest ciągła.
4. Złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe.

Przykład: Funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych ($f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Tw. [**O wartości pośredniej**] Jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i $f(a) < 0 < f(b)$, to istnieje takie $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.

Tw. Jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i monotoniczna, to $f[(a, b)] = (\alpha, \beta)$ dla pewnych α, β oraz $f^{-1} : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ jest ciągła.

Tw. [**Weierstrass**] Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to istnieje $x_0 \in [a, b]$ takie, że $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$

Wn. Każda funkcja ciągła na odcinku domkniętym $[a, b]$ jest ograniczona

Różniczkowanie

Def. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Tw. Jeśli f i g są różniczkowalne w punkcie x, to

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ (o ile $g(x) \neq 0$)

.

Tw. Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x oraz g jest różniczkowalna w punkcie $f(x)$ to

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tw. Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie a, $f'(a) \neq 0$ oraz $f(a) = b$ to funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie b oraz

$$(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$$

Podstawowe własności

1. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a to jest ciągła w punkcie a.
2. Funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła (w każdym punkcie) ale nie jest różniczkowalna punkcie $x = 0$.

Podstawowe wzory

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln x)' = 1/x$
4. $\sin'(x) = \cos(x)$
5. $\cos'(x) = -\sin(x)$
6. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
8. $(a^x)' = \ln(a)a^x$

Def. f ma **lokalne maksimum** (minimum) w punkcie a jeśli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) dla wszystkich $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Tw. Jeśli f jest różniczkowalna w (a, b) oraz ma lokalne ekstremum w punkcie $c \in (a, b)$ to $f'(c) = 0$.

Tw. [Rolle] Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, różniczkowalna w (a, b) oraz $f(a) = f(b) = 0$ to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f'(c) = 0$.

Tw. [Lagrange] Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz różniczkowalna w (a, b) to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Tw. [Cauchy] Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe i różniczkowalna w (a, b) oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$ to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Tw. [Wzór Taylora] Jeśli f jest n krotnie różniczkowalna, dla każdego punktu x oraz dowolnego h mamy

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(\zeta_h)}{n!} h^n$$

dla pewnego $\zeta_h \in (x, x + h)$

Badanie własności funkcji

Tw. Jeśli dla każdego $x \in (a, b)$ mamy $f'(x) = 0$ to f jest stała na (a, b)

Tw. Jeśli dla każdego $x \in (a, b)$ mamy $f'(x) > 0$ to f jest ostro rosnąca na (a, b)

Tw. Jeśli dla każdego $x \in (a, b)$ mamy $f'(x) < 0$ to f jest ostro malejąca na (a, b)

Tw. Jeśli $\delta > 0$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (a - \delta, a)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, a + \delta)$ i f jest ciągła w punkcie a to f ma lokalne minimum w punkcie a

Tw. Jeśli $\delta > 0$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (a - \delta, a)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, a + \delta)$ i f jest ciągła w punkcie a to f ma lokalne maksimum w punkcie a

Def. Funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in (a, b)$ oraz $t \in (0, 1)$ prawdziwa jest nierówność

$$f(t\alpha + (1 - t)\beta) \leq tf(\alpha) + (1 - t)f(\beta)$$

Tw. Jeśli dla każdego $x \in (a, b)$ mamy $f''(x) > 0$ to f jest wypukła na (a, b)

Tw. Jeśli $f'(a) = 0$ i $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) w pewnym otoczeniu a to f ma lokalne minimum (maksimum) w punkcie a

Twierdzenie de'Hospitala

Tw. Załóżmy, że $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Jeśli istnieje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uwaga. Granicę $x \to a$ można zastąpić granicami $x \to a+$, $x \to a-$ $x \to \infty$ oraz $x \to -\infty$

Uwaga. Warunek $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ można zastąpić $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ bądź $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$

Ważne granice

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Wzór Leibniza

Tw. Jeśli funkcje f i g są n-krotnie różniczkowalne, to

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Rachunek całkowy

Interpretacja

Jeśli $f(x) \geq 0$ dla $x \in [a, b]$ to $\int_a^b f(x)dx$ jest równe polu obszaru

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Podstawowe własności

Tw. Funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna.

Przykład: Funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych ($f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) nie jest całkowalna (w sensie Riemana) na żadnym przedziale.

Tw. Jeśli $a < b < c$ to $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Tw. Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$

Tw. Jeśli f jest całkowalna na odcinku $[a,b]$ oraz $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ różni się od f tylko w skończonej liczbie punktów, to g jest całkowalna oraz $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$.

Tw. [**Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego**] Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

Tw. Jeśli $F'(x) = f(x)$ to

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\ .$$

Całka nieoznaczona

Def. Funkcję F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f jeśli $F'(x) = f(x)$ dla każdego x

Def. Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ nazywamy wyrażenie $F(x) + C$, gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f. Oznaczana jest ona przez $\int f(x)dx$.

Podstawowe własności

1. $\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$
2. Jeśli $F(x) = \int f(x)dx$ to
$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Podstawowe wzory

1. $\int c dx = cx + C$
2. jeśli $a \neq -1$ to $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
3. $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|) + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
6. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
7. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
8. $\int \tan(x)dx = -\ln(|cos(x)|) + C$
9. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$
11. $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + C$
12. $\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})\right) + C$
13. $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$
14. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

Tw. Całkowanie przez części:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Przykłady

1. $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C$
2. $\int xe^x dx = e^x(x-1)dx + C$

Tw. Całkowanie przez podstawienie: Jeśli g jest różniczkowalna i jej pochodna jest ciągła na $[a,b]$ to

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

Tw. Całkowanie przez podstawienie:

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(u)du$$

Przykłady

1. $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right) + C$

Wzory przydatne do całkowania funkcji wymiernych

1. $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})$
2. $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{(a-b)(x-a)} + \frac{1}{(b-a)(x-b)}$
3. $\frac{x}{(x-a)(x-b)} = \frac{a}{(a-b)(x-a)} + \frac{b}{(b-a)(x-b)}$

Wzory przydatne do całkowania funkcji trygonometrycznych

Jeśli $t = \tan(\frac{x}{2})$, to

1. $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$
2. $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
3. $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Podstawienia Eulera

Do obliczania całek zawierających wyrażenie $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

1. (jeśli $a > 0$) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$
2. (jeśli $c > 0$) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$
3. $\sqrt{(x-a)(x-b)} = t(x-a)$

Zastosowania

Długość krzywej

Krzywa $L = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$ na długość

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx\ .$$

Objętość i powierzchnia bryły obrotowej

Jeśli $f(x) \geq 0$ dla $x \in [a,b]$ to bryła

$$\{(x,y,z) : x \in [a,b] \wedge \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x)\}$$

ma objętość

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2 dx$$

oraz powierzchnię

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

1. koło o promieniu r ma pole πr^2
2. elipsa zadana równaniem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ma pole πab.
3. koło o promieniu r ma obwód $2\pi r$
4. kula o promieniu r ma objętość $\frac{4}{3}\pi r^3$
5. kula o promieniu r ma powierzchnię $4\pi r^2$

Przykłady funkcji których całki nie są funkcjami elementarnymi

1. $\int e^{-x^2}dx$
2. $\int \frac{\sin(x)}{x}dx$
3. $\int \frac{1}{\ln(x)}dx$