O co chodzi z tymi monadami ?

Jacek Cichoń
WIT, Politechnika Wrocławska

grudzień 2022

1 Wprowadzenie

Następujące zdanie z książki S. Mac Lane'a pt "Categories for the Working Mathematician" (patrz [1])

> All told, a monad in X is just a monoid in the category of endofunctors of X, with product $\times$ replaced by composition of endofunctors and unit set by the identity endofunctor.

wzbudziło duże zainteresowanie oraz, przy okazji, spowodowało spore zamieszanie w środowisku programistów używających funkcyjnych języków programowania.

Celem tego artykułu jest dosyć dokładne wyjaśnienie tego bardzo skondensowanego zdania. Ale zaznaczmy, już na samym początku naszych rozważań, że zrozumienie tego zdania **nie jest konieczne** do sprawnego posługiwania się monadami w językach programowania. Tak samo jak rozumienie podstawowych pojęć Teorii Kategorii nie jest niezbędne do tego aby sprawnie posługiwać się typowo funkcjonalnymi językami programowania (chociaż „czysty" programista będzie musiał przyjmować pewne fakty „na wiarę", czego nie cierpi autor tego artykułu). Jednak jeśli ktoś chciałby zrozumieć zacytowane wyżej zdanie, to musi znać podstawowe pojęcia Teorii Kategorii. A przy okazji czytania tego artykułu być może pozna kilka nowych pojęć.

Wszystkie pojęcia omawiane w tym artykule można znaleźć w książce [1]. Powiedzieć można, że autor tego artykułu "wyłuskał" je z tej książki, zapisał w trochę bardziej nowoczesnym języku (cytowana książka opublikowana została w 1978 roku), poukładał po swojemu i wzbogacił kilkoma przykładami.

Zakładać będziemy, że czytelnik tego artykułu zna podstawowe pojęcia Teorii Kategorii. A dokładniej, zakładamy, że czytelnik wie co to jest kategoria oraz czym jest pojęcie funktora między kategoriami. Ustalmy kilka oznaczeń. Obiekty kategorii $\mathcal{C}$ oznaczać będziemy przez $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, przez $\mathcal{C}$ oznaczać będziemy przez $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zaś morfizmy kategorii $\mathcal{C}$ oznaczać będziemy przez $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$. Czytelnik interesujący się programowaniem funkcyjnym powinien znać kilka innych kategoryjnych pojęć, takich jak definicja produktu (uogólnienie pojęcia iloczynu kartezjańskiego) oraz co-produktu, gdyż pojęcia przydają się do zrozumienia podstawowych metod tworzenia typów. Bardzo dobrym wprowadzeniem do Teorii Kategorii dla informatyków jest książka [2].

Naszą główną kategorią będzie kategoria **Set**, której obiektami są wszystkie zbiory zaś morfizmami są funkcje między zbiorami. Zwróćmy uwagę na pewien ważny szczegół. Otóż w każdej kategorii każdy morfizm musi mieć jednoznacznie określoną dziedzinę oraz przeciwdziedzinę. Więc poprawnym modelem morfizmów tej kategorii, wyrażonym w języku klasycznej teorii zbiorów, jest klasa trójek

$$\{(A, B, f) : f \text{ jest funkcją } \wedge f : A \to B\} \ .$$

Czyli zapis $f : A \to B$ w kategorii **Set** oznacza, że $(A, B, f) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$. W kategorii tej złożeniem morfizmów jest złożenie funkcji.

Zauważmy, że to precyzyjne wskazywanie dziedziny i przeciwdziedziny odróżnia Teorię Kategorii od klasycznej Teorii Mnogości: w Teorii Mnogości funkcja jest relacją; w szczególności funkcja identycznościowa $id_{\mathbb{N}} = \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ przekształca $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, lecz również $id_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (gdyż w niej powszechnie przyjmuje się, że $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$); w Teorii Kategorii są to dwa różne morfizmy. Z perspektywy programistycznej oznacza to, że językach programowania funkcyjnego nie ma mechanizmów automatycznej zamiany typów.

Przypomnijmy dwie obserwacje na temat kategorii SET. W kategorii tej istnieją elementy końcowe, czyli takie obiekty X, że dla każdego obiektu Y istnieje **dokładnie jeden** morfizm $f : Y \to X$ (są to dowolne zbiory jednoelementowe). W kategorii tej istnieje też obiekt początkowy, czyli taki element X, że dla dowolnego obiektu Y istnieje dokładnie jeden morfizm $f : X \to Y$ (jest nim oczywiście zbior pusty).

Warto też wiedzieć, że kategoria **Set** nie jest dokładnym modelem kategorii **Hask** wykorzystywanej w języku programowania Haskell. W kategorii **Hask** każdy obiekt zawiera jeden wyróżniony element $\perp$, który interpretowany jest jako „niezdefiniowany". Kategorię **Set** możemy traktować jako przybliżenie kategorii **Hask**. Tematem tym nie będziemy się zajmować się w tym artykule. Rozumowania będziemy prowadzić głównie w kategorii **Set**.

A oto kilka endofunktorów kategorii **Set**:

1. funktor identyczność: $I(X) = X$ oraz $I(f) = f$.
2. funktor tworzenia list: $L(X) = [X]$, gdzie $[X]$ oznacza zbiór wszystkich skończonych list elementów zbioru X; działanie funktora L na morfizmach $f : X \to Y$ określone jest wzorem $L(f)([x_1, \ldots, x_n]) = [f(x_1), \ldots, f(x_n)]$.
3. funktor Maybe: $M(X) = X \cup \{\mathrm{Nothing}_X\}$, gdzie $\mathrm{Nothing}_X$ jest unikalnym elementem nie należącym do X (np. $\mathrm{Nothing}_X = \{X\}$) z działaniem $M(f : X \to Y) = f \cup \{(\mathrm{Nothing}_X, \mathrm{Nothing}_Y)\}$
4. funktor Reader z ustalonym parametrem A: $R_A(X) = X^A$, $R_A(f : X \to Y)(\phi) = f \circ \phi$.
5. Dla ustalonego monoidu $A = (U, \star, e)$ funktor Writer W_A jest określony wzorami: $W_A(X) = X \times U$, $(W_A(f : X \to Y))(x, u) = (f(x), u)$.
6. funktor $D(X) = X \times X$ z działaniem na morfizmach określonych wzorem $D(f : X \to Y)(x, y) = (f(x), f(y)$.

Warto wspomnieć, że wszystkie powyższe funktory są monadami.

W artykule tym będziemy się od czasu do czasu posługiwali się składnią języka Haskell. Jednak będziemy stosowali ją tylko w sposób bardzo elementarny tak aby czytelnik nie znający tego języka móg samemu zapisać odpowiednie kody w jego ulubionym języku programowania który zawiera mechamizmy programowania funkcyjnego (np. Python czy też JavaScript). W języku Haskell $F(f)$ implementowane jest jako `fmap f` czyli wynik działania $F(f)$ na elemencie $xf \in F(X)$ zapisujemy jako `fmap f xf` bądź `f <$> xf`.

2 Naturalne transformacje

Jednym z podstawowych pojęć Teorii Kategorii jest pojęcie naturalnej transformacji pomiędzy funktorami. Poświęcimy więc jemu nieco czasu i to nie tylko z powodu przydatności tego pojęcia dla naszych rozważań: w zasadzie Teoria Kategorii nie miałaby sensu bez tego pojęcia.

Definicja 1 *Niech $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ będą kategoriami oraz niech $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{G}$ będą funktorami. Rodzina morfizmów $\eta = (\eta_X)_{X \in ob(\mathcal{C})}$ kategorii $\mathcal{D}$ jest naturalną transformację między F i G jeśli dla każdych $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ oraz każdego morfizmu $f : X \to Y$ w kategorii $\mathcal{C}$ następujący diagram*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

komutuje.

Przypomnijmy, że komutowanie powyższego diagramu oznacza, że $G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f)$.

To że η jest naturalną transformacją między funktorami F i G zapisujemy jako $\eta : F \stackrel{\bullet}{\to} G$, bądź bardziej obrazkowo jako

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

W języku Haskell to, że eta jest transformacją sprowadza się do równości

```
eta . (fmap f) = (fmap f) . eta
```

dla dowolnej funkcji f.

Przykład 1 *Rozważamy kategorię* **Set**. *Niech $D(X) = X \times X$ oraz dla funkcji $f : X \to Y$ kładziemy $D(f)(x) = (f(x), f(x))$. Łatwo można sprawdzić, że P jest funktorem. Sprawdźmy najpierw, że rodzina morfizmów $\eta = (\eta_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})}$, gdzie $\eta_X(x) = (x, x)$ jest naturalną transformacją między funktorem identycznościowym I a funktorem D, czyli, że $\eta : I \stackrel{\bullet}{\to} P$.*

Rzeczywiście, niech $f : X \to Y$ będzie dowolną funkcją (czyli morfizmem w **Set***). Niech $x \in X$. Wtedy $(D(f) \circ \eta_X)(x) = D(f)(\eta_X(x)) = D(f)((x, x)) = (f(x), f(x))$ oraz $(\eta_Y \circ D(f))(x) = \eta_Y(D(f)(x)) = \eta_Y(f(x)) = (f(x), f(x))$. Zatem $D(f) \circ \eta_X = (\eta_Y \circ D(f))$. Więc η jest naturalną transformacją.*

Okazuje się, że η jest jedyną naturalną transformację z I do D !!!. Załóżmy bowiem, że $\rho = (\rho_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})}$ oraz, że $\rho : I \stackrel{\bullet}{\to} D$. Ustalmy zbiór X oraz jakiś jednoelementowy zbiór $A = \{a\}$. Niech $c_x = \{(a, x)\}$. Wtedy $c_x : A \to X$, no i $c_x(a) = x$. Spójrzmy na diagram

$$\begin{tikzcd} \{a\} \arrow[r, "\rho_{\{a\}}"] \arrow[d, "c_x"'] & D(\{a\}) \arrow[d, "D(c_x)"] \\ X \arrow[r, "\rho_X"] & D(X) \end{tikzcd}$$

Otrzymaliśmy go z diagramu z definicji naturalnej transformacji podstawiając za F funktor I oraz za G funktor D (no i wykonalismy uproszczenia $I(X) = X$ i $I(c_x) = c_x$). Założyliśmy, że ρ jest naturalną transformacją, więc diagram ten komutuje, zatem $D(c_x) \circ \rho_{\{a\}} = \rho_X \circ c_x$. Następnie mamy

$$(D(c_x) \circ \rho_{\{a\}})(a) = D(c_x)(\rho_{\{a\}}(a)) = D(c_x)((a, a)) = (c_x(a), c_x(a)) = (x, x)$$

oraz

$$(\rho_X \circ c_x)(a) = \rho_X(c_x(a)) = \rho_X(x) \ ,$$

więc $\rho_X(x) = (x, x)$. *Zatem* $\rho = \eta$.

Zwróćmy uwagę na to, że dla danego zbioru X rodzina wszystkich funkcji z X w $X \times X$ może być dużej mocy. Na przykład, gdy $X = \mathbb{N}$, to rodzina wszystkich funkcji z X do $X \times X$ jest nieprzeliczalna (dokładniej, jest mocy continuum). Ale naturalnych transformacji z I(X)=X do $D(X) = X \times X$ jest bardzo mało: jest tylko jedna taka transformacja.

Uwaga 1 *W języku Haskell ta jedna naturalna transformacja z I do D odpowiada funkcji polimorficznej*

```
dup :: a -> (a,a)
dup x  = (x,x)
```

Dla ustalonych funktorów F i G przez $\mathrm{Nat}(F, G)$ oznaczać będziemy klasę wszystkich naturalnych transformacji z funktora F do G, czyli

$$\mathrm{Nat}(F, G) = \{\rho : \rho : F \stackrel{\bullet}{\to} G\}$$

W przykładzie 1 pokazaliśmy, że $\mathrm{Nat}(I, D) = \{\eta\}$. W podobny sposób możemy pokazać, że $\mathrm{Nat}(I, I) = \{id\}$, gdzie $id = (id_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})}$ zaś id_X zaś jest identycznością obiektu X. Równe łatwo można pokazać, że $\mathrm{Nat}(D, I) = \{\pi_1, \pi_2\}$, gdzie $\pi_1((x, y)) = x$ zaś $\pi_2((x, y)) = y$. Trochę trudniejsze, lecz nadal elementarne, jest wyznaczenie wszystkich naturalnych transformacji z D do D. Mamy bowiem

$$\mathrm{Nat}(D, D) = \{\mathrm{id}, \mathrm{flip}, \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2\} \ ,$$

gdzie $\mathrm{id}((x, y)) = (x, y)$, $\mathrm{flip}((x, y)) = (y, x)$, $\mathrm{p}_1((x, y)) = (x, x)$ oraz $\mathrm{p}_2((x, y)) = (y, y)$. Tak oto wyglądają wszystkie naturalne transformacje pomiędzy funktorami I oraz D:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[loop left, "id"] \arrow[r, "\eta"] & D \arrow[l, bend right, "\pi_1"'] \arrow[l, bend left, "\pi_2"] \arrow[loop above, "id"] \arrow[loop right, "flip"] \arrow[loop below, "p_1"] \arrow[loop right, "p_2"'] \end{tikzcd}$$

Zauważmy, że może się zdarzyć, że $\mathrm{Nat}(F, G)$ jest puste. Na przykład $\mathrm{Nat}(L, I) = \emptyset$, gdyż jeśli ρ byłoby naturalną transformacją z L do I, to jej składowa $\rho_\emptyset$ byłaby funkcją z $L(\emptyset)$ w zbiór $I(\emptyset) = \emptyset$, a takiej funkcji nie ma, gdyż $L(\emptyset) \neq \emptyset$.

2.1 Lemat Yonedy[1]

W rozdziale tym omówimy pewien bardzo ważny wynik (zwany lematem Yonedy) ogólnej Teorii Kategorii na temat transformacji naturalnych dla specyficznych funktorów z dowolnej kategorii w kategorię **Set**.

Ustalmy kategorię $\mathcal{C}$ taką, że dla dowolnych dwóch obiektów $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ rodzina wszystkich morfizmów kategorii $\mathcal{C}$ z A do B jest zbiorem (kategorie

[1] Rozdział ten można pominać.

takie nazywamy lokalnie małymi kategoriami. Oczywiście, kategoria **Set** jest taką kategorią. Dla ustalonego obiektu $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ definiujemy następujące odwzorowanie

$$\mathrm{Hom}_A(X) = \{\phi \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) : \phi : A \to X\}$$

oraz rozszerzmy je do funktora kładąc dla $f : X \to Y$

$$\mathrm{Hom}_A(f) = \{f \circ \phi : \phi : A \to X\}$$

Łatwo sprawdzić, że Hom_A jest funktorem z kategorii $\mathcal{C}$ w kategorię **Set**.

Uwaga 2 *W kategorii* **Set** *funktor ten nazywany jest Reader.*

Twierdzenie 1 (Lemat Yonedy) *Załóżmy, że $\mathcal{C}$ jest lokalnie małą kategorią. Niech $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Niech $F : \mathcal{C} \to$ **Set** będzie funktorem. Wtedy*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_A, F) \cong F(A)$$

Symbol $\cong$ w powyższym twierdzeniu oznacza bijekcję. Wkrótce poznamy dokładny opis tej bijekcji.

Dowód. (1) Ustalmy element $\alpha \in F(A)$. Jeśli $\phi : A \to X$ jest morfizmem kategorii $\mathcal{C}$, to $F(\phi) : F(A) \to F(X)$ (w kategorii **Set**), zatem $F(\phi)(\alpha) \in F(X)$. Połóżmy

$$\eta_X^\alpha(\phi) = F(\phi)(\alpha)\ .$$

Wtedy $\eta_X^\alpha : \mathrm{Hom}_A(X) \to F(X)$. Niech

$$\eta^\alpha = (\eta_X^\alpha)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\ .$$

Pokażemy, że η^α jest naturalną transformacją. Niech bowiem $f : X \to Y$ będzie morfizmem $\mathcal{C}$. Pokazać musimy komutowanie następującego diagramu

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(X) & \xrightarrow{\eta_X^\alpha} & F(X) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\
\mathrm{Hom}_A(Y) & \xrightarrow{\eta_Y^\alpha} & F(Y)
\end{array}$$

Weźmy więc $\phi \in \mathrm{Hom}_A(X)$. Mamy

$$(F(f)\circ\eta_X^\alpha)(\phi) = F(f)(\eta_X^\alpha(\phi)) = F(f)(F(\phi)(\alpha)) = (F(f)\circ F(\phi))(\alpha) = F(f\circ\phi)(\alpha)$$

oraz

$$(\eta_Y^\alpha \circ \mathrm{Hom}_A(f))(\phi) = \eta_Y^\alpha(\mathrm{Hom}_A(f)(\phi)) = \eta_Y^\alpha(f \circ \phi) = F(f \circ \phi)(\alpha)\ ,$$

więc diagram ten komutuje.

(2) Pokażemy teraz, że dowolna naturalna transformacja $\eta : \mathrm{Hom}_A \xrightarrow{\bullet} F$ jest postaci η^α dla jakiegoś $\alpha \in F(A)$. Niech więc $\eta : \mathrm{Hom}_A \xrightarrow{\bullet} F$. Ustalmy $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ oraz $\phi \in \mathrm{Hom}_A(X)$. Rozważmy następujący diagram

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(A) & \xrightarrow{\eta_X} & F(X) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(\phi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\phi)} \\
\mathrm{Hom}_A(X) & \xrightarrow{\eta_X} & F(X)
\end{array}$$

Wiemy, że diagram ten komutuje. Niech $\alpha = \eta_A(id_A)$. Mamy więc

$$(F(\phi) \circ \eta_A)(id_A) = F(\phi)(\eta_A(id_A)) = F(\phi)(\alpha)$$

oraz

$$(\eta_X \circ \mathrm{Hom}_A(\phi))(id_A) = \eta_X(\mathrm{Hom}_A(\phi)(id_A)) = \eta_X(\phi \circ id_A) = \eta_X(\phi) \ ,$$

więc $\eta_X(\phi) = F(\phi)(\alpha) = \eta^\alpha_X(\phi)$. Zatem $\eta_X = \eta^\alpha_X$ dla każdego $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, więc $\eta = \eta^\alpha$.

(3) Zauważmy w końcu, że jeśli $\alpha, \beta \in F(A)$ i $\alpha \neq \beta$, to $\eta^\alpha \neq \eta^\beta$. Aby to zauważyć popatrzmy na A- te składowe tych odwzorowań i wyznaczmy ich wartość na id_A. Mamy $\eta^\alpha_A(id_A) = F(id_A)(\alpha) = id_{F(A)}(\alpha) = \alpha$ i podobnie $\eta^\beta_A(id_A) = \beta$. □

Przykład 2 *Pokażemy teraz jak lemat Yonedy może się przydać do wyznaczania naturalnych transformacji między funktorami. Powróćmy do funktora D rozważanego w przykładzie 1. Dosyć łatwo sprawdza się, że odwzorowania* id, flip, p_1 *oraz* p_2 *są naturalnymi transformacjami z D do funktora D. Trochę trudniejsze jest „ręczne” sprawdzenie tego, że to są to wszystkie naturalne transformacje z D do D. Lemat Yonedy idealnie przydaje się się do tego. Zauważmy dowiem, że dla dowolnego zbioru X istnieje bardzo prosta bijekcja α_X między zbiorami $X \times X$ oraz $X^{\{0,1\}}$:*

$$\alpha_X((x_0, x_1)) = \{(0, x_0), (1, x_1)\} \ .$$

Co więcej, rodzina $\alpha = (\alpha_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})}$ jest naturalnym izomorfizmem między funktorami D a $\mathrm{Hom}_{\{0,1\}}$. Z tego wynika, że zbiory $\mathrm{Nat}(D, D)$ i $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\{0,1\}}, D)$ są izomorficzne. Z lematu Yonedy otrzymujemy

$$|\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\{0,1\}}, D)| = |D(\{0,1\})| = |\{0,1\} \times \{0,1\}| = 4.$$

Powyższy przykład nie jest jedynym rodzajem zastosowania lematu Yonedy. Ciekawe rozważania zaczynają się od zastosowania tego lematu do funktora F postaci Hom_B. Mamy bowiem

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_A, \mathrm{Hom}_B) \cong \mathrm{H_B}(A) \ ,$$

oraz, że $\mathrm{H_B}(A)$ jest rodziną wszystkich morfizmów z obiektu B w obiekt A. Tego bardzo ciekawego tematu będziemy rozwijać w tym artykule.

3 Funktor tworzenia list

W rozdziale tym przyjrzymy się własnością funktora tworzenia list w kategorii **Set**. Funktor ten oznaczyliśmy symbolem L. Listę elementów $x_1, \ldots, x_n$ zapisywać będziemy, tak jak w języku Haskell, $[x_1, \ldots, x_n]$. W szczególności $[]$ oznaczać będzie listę pustą. Mamy więc

$$L(X) = \{[x_1, \ldots, x_n] : n \in \mathbb{N} \wedge x_1, \ldots, x_n \in X\} \ ,$$

oraz dla $f : X \to Y$ mamy

$$L(f)([x_1, \ldots, x_n]) = [f(x_1), \ldots, f(x_n)]$$

Funktor L będzie odgrywał w naszych rozważaniach rolę wzorcowej monady. Wybraliśmy go za względu na to, że dla tego funktora wszystkie własności które będziemy rozważać są łatwe do sprawdzenia. A przyjrzymy się dwóm naturalnym transformacją związanych z L: transformacji włożenia $\eta : I \stackrel{\bullet}{\to} L$ oraz transformacji spłaszczania $\eta : L \circ L \stackrel{\bullet}{\to} L$.

3.1 Włożenie w funktor tworzenia list

Niech $\eta_X : X \to [X]$ będzie określona wzorem $\eta_X(x) = [x]$ oraz niech $\eta = (\eta_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})}$. Pokażemy teraz, że $\eta : I \stackrel{\bullet}{\to} L$. Niech bowiem $f : X \to Y$. Podstawiając w diagramie z definicji transformacji naturalnej za F funktor I oraz za G funktor L otrzymujemy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & L(X) \arrow[d, "L(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"] & L(Y) \end{tikzcd}$$

Diagram ten komutuje, gdyż dla dowolnego $x \in X$ mamy $(L(f) \circ \eta_X)(x) = L(f)(\eta_X(x)) = L(f)([x]) = [f(x)]$, oraz $(\eta_Y \circ f)(x) = \eta_Y(f(x)) = [f(x)]$.

3.2 Spłaszczenie

Oznaczmy przez μ funkcję konkatenacji list, a dokładniej, dla każdego zbioru X oznaczamy przez μ_X odwzorowanie

$$\mu_X : [[X]] \to [X]$$

określone jako

$$(\mu_X)([L_1, \ldots, L_n]) = L_1 + \!\!+ \ldots + \!\!+ L_n \ ,$$

gdzie $L_1, \ldots, L_n \in [X]$ zaś $+\!\!+$ oznacza konkatenację dwóch list.

Lemat 1 *Niech $f : X \to Y$ oraz $L_1, L2 \in [X]$. Wtedy*

$$L(f)(L_1 +\!\!+ L_2) = L(f)(L_1) +\!\!+ L(f)(L_2) \ .$$

Dowód. Niech $f : X \to Y$. Ustalmy listy $L_1 = [x_1, \ldots, x_n]$ oraz $L_2 = [y_1, \ldots, y_m]$ ze zbioru $[X]$. Wtedy

$$\begin{aligned} L(f)(L_1 +\!\!+ L_2) &= L(f)([x_1, \ldots, x_n] +\!\!+ [y_1, \ldots, y_m]) \\ &= L(f)([x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]) \\ &= [f(x_1), \ldots, f(x_n), f(y_1), \ldots, f(y_m)] \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} L(f)(L_1) +\!\!+ L(f)(L_2) &= L(f)([x_1, \ldots, x_n]) +\!\!+ L(f)([y_1, \ldots, y_m]) \\ &= [f(x_1), \ldots, f(x_n)] +\!\!+ [f(y_1), \ldots, f(y_m)] \\ &= [f(x_1), \ldots, f(x_n), f(y_1), \ldots, f(y_m)] \end{aligned}$$

Zatem $L(f)(L_1 +\!\!+ L_2) = L(f)(L_1) +\!\!+ L(f)(L_2)$. $\square$

Własność funktora L udowodniona w powyższym lemacie uogólnia się (możemy zastosować indukcję matematyczną do udowodnienia tego faktu) na skończony ciąg list. Mamy więc

$$L(f)(L_1 + \!\!+ \ldots + \!\!+ L_n) = L(f)(L_1) + \!\!+ \ldots + \!\!+ L(f)(L_n)$$

Niech $\mu = (\mu_X)_{X \in obj(\mathbf{Set})}$. Pokażemy, że $\mu : L \circ L \xrightarrow{\bullet} L$. Ustalmy więc funkcję $f : X \to Y$. Pokazać musimy komutowanie diagramu

$$\begin{array}{ccc} L(L(X)) & \xrightarrow{\eta_X} & L(X) \\ {\scriptstyle L(L(f))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L(f)} \\ L(L(Y)) & \xrightarrow{\eta_Y} & L(Y) \end{array}$$

Ustalmy element $LL = [L_1, \ldots, L_n]$ ze zbioru [[X]]. Wtedy

$$(L(f) \circ \mu_X)([L_1, \ldots, L_n]) = L(f)(L_1 + \!\!+ \ldots + \!\!+ L_n)$$

oraz

$$\begin{aligned} (\mu_Y) \circ L(L(f)))([L_1, \ldots, L_n]) &= \mu_Y([L(f)(L_1), \ldots, L(f)(L_n)]) \\ &= L(f)(L_1) + \!\!+ \ldots + \!\!+ L(f)(L_n) \; . \end{aligned}$$

Przed chwilą pokazaliśmy rówość obu otrzymanych wyrażeń. Zatem $L(f) \circ \mu_X = \mu_Y \circ L(L(f))$. Pokazaliśmy więc, że $\mu : L \circ L \xrightarrow{\bullet} L$.

3.3 Związek włożenia ze spłaszczeniem

Składowa η_X transformacji η jest odwzorowaniem ze zbioru X w zbiór $L(X)$ dla dowolnego zbioru X. W szczególności $\eta_{L(X)} : L(X) \to L(L(X))$. Ot przykład działanie funkcji $\eta_{L(X)}$:

$$\eta_{L(X)}([x, y, z]) = [[x, y, z]]$$

Zastosujmy teraz do odwzorowania $\eta_X : X \to L(X)$ funktor L. Otrzymujemy odwzorowanie $L(\eta_X) : L(X) \to L(L(X))$. Oto przykład jego działania na liście [x,y,z]:

$$L(\eta_X)([x, y, z]) = [\eta_X(x), \eta_X(y), \eta_X(z)] = [[x], [y], [z]] \; .$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy dwa różne wyniki. Mamy więc dwa różne odwzorowania $\eta_{L(X)}, L(\eta_X) : L(X) \to L(L(X))$. Zauważmy jednak, że

$$\mu \circ \eta_{L(X)}([x, y, z]) = \mu \circ L(\eta_X)([x, y, z]) = [x, y, z] \; ,$$

czyli, że

$$\mu_X \circ \eta_{L(X)} = \mu_X \circ L(\eta_X)([x, y, z]) = id_{L(X)} \; .$$

Zatem, mimo iż $L(\eta_X)$ i $\eta_{L(X)}$ dają inne wyniki, to po zastosowaniu spłaszczenia μ_X otrzymujemy **ten sam wynik**. Otrzymane wyniki możemy podsumować w ten sposób: następujący diagram z Rysunku 1 jest przemienny. W diagramie tym == oznacza równość.

Za chwilę wrócimy do uproszczenia tego diagramu, lecz przedtem omówimy dwie metody przekształcenia transformacji naturalnych.

$$
\begin{tikzcd}
 & L(L(X)) \arrow[dd, "\mu_X"] & \\
L(X) \arrow[ur, "\eta_{L(X)}"] \arrow[dr, equal] & & L(X) \arrow[ul, "L(\eta_X)"'] \arrow[dl, equal] \\
 & L(X) &
\end{tikzcd}
$$

Rysunek 1: Własności spłaszczenia list

3.4 Proste modyfikacje transformacji naturalnych

(1) Załóżmy, że $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ są funktorami. Załóżmy, że $\rho : F \xrightarrow{\bullet} G$. Niech $K : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ będzie kolejnym funktorem. Sytuację tę możemy zobrazować następującą ilustracją

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\rho"] & \mathcal{B} \arrow[r, "K"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Jest jasne, że złożenia $K \circ F$ oraz $K \circ G$ są funktorami z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{C}$ (złożenie fuknktorów jest funktorem). Załóżmy teraz, że $f : X \to Y$ jest morfizmem w kategorii $\mathcal{A}$. Wtedy $G(f) \circ \rho_X = \rho_Y \circ F(f)$. Nakładając na tę rowność z obu stron (z lewej strony) funktor K otrzymujemy $K(G(f) \circ \rho_X) = K(\rho_Y \circ F(f))$, czyli $KG(f)) \circ K(\rho_X) = K(\rho_Y) \circ K(F(f))$ czyli

$$
(K \circ G)(f) \circ K(\rho_X) = K(\rho_Y) \circ (K \circ F)(f) \ ,
$$

a to oznacza, że $K(\rho)$ zdefiniowane wzorem $K(\rho) = (K(\eta_X))_{x \in ob(\mathcal{A})}$ jest naturalną transformacją między $K \circ F$ a $K \circ G$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "K\circ F"] \arrow[r, bend right, "K\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow K(\rho)"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

(2) Załóżmy teraz, że $F, G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ są funktorami. Niech tym razem $\rho : F \xrightarrow{\bullet} G$. Niech $K : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ będzie jakimś funktorem. Sytuację tę możemy zobrazować następującą ilustracją

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "K"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\rho"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Niech $f : X \to Y$ będzie morfizmem w kategorii $\mathcal{A}$. Wtedy $K(f) : K(X) \to K(Y)$ w kategorii $\mathcal{B}$. Mamy więc $F(K(f)) : F(K(X)) \to F(K(Y))$ i $G(K(f))$:

$G(K(X)) \to G(K(Y))$. Korzystając z tego, że ρ jest naturalną transformacją między F i G otrzymujemy równość

$$G(K(f) \circ \rho_{K(X)} = \rho_{K(Y)} \circ F(K(X)) \ .$$

A z tego wynika, że jeśli położymy $\rho_K = (\rho_{K(X)})_{X \in obj(\mathcal{A})}$, to ρ_K jest naturalną transformacją między $F \circ K$ a $G \circ K$, co można przedstawić za pomocą następującego diagramu:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F \circ K"] \arrow[r, bend right=50, "G \circ K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \rho_K"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Powyższe rozumowania można podsumować następująco: jeśli $\rho : F \overset{\bullet}{\to} G$ oraz K jest funktorem który mogę składać z lewej strony z F i G, to $K(\rho) : K \circ F \overset{\bullet}{\to} K \circ G$; jeśli K mogę składać z F i G z prawej strony, to $\rho_K : F \circ K \overset{\bullet}{\to} G \circ K$.

W szczególnym przypadku, jeśli F,G i K są endofunktorami kategorii $\mathcal{A}$ oraz $\rho : F \overset{\bullet}{\to} G$, to $K(\rho) : K \circ F \overset{\bullet}{\to} K \circ G$ oraz $\rho_K : F \circ K \overset{\bullet}{\to} G \circ K$.

W trakcie dalszych, w Rozdziale **??** rozważań uogólnimy powyższe rozważania.

3.5 Spłaszczenia funktora tworzenia list - c.d.

Korzystając z obserwacji z poprzedniego rozdziału możemy diagram z Rysunku 1 przerysować do bardziej ogólnej postaci

$$\begin{tikzcd} & L^2 \arrow[dd, "\mu"] & \\ L \arrow[ur, "\eta_L"] \arrow[dr, equal] & & L \arrow[ul, "L(\eta)"'] \arrow[dl, equal] \\ & L & \end{tikzcd}$$

gdzie strzałki oznaczają tutaj naturalne transformacje. W diagramie tym, w porównaniu z poprzednim usunęliśmy odniesienia do konkretnego zbioru X. Ponadto zastosowaliśmy tutaj skrót $L^2 = L \circ L$.

3.6 Własności spłaszczenia

Rozważmy element $lllx = [[llx_1, llx_2, \ldots, llx_k]$ ze zbioru $L(L(LX))$. Wiemy, że $\mu_X : L(L(X)) \to L(X)$. Zatem $L(\mu_X) : L(L(L(X))) \to L(L(X))$ oraz $\mu_{L(X)} : L(L(L(X))) \to L(L(X))$. Obliczmy

$$\begin{aligned} L(\mu_X)(lllx) &= [\mu_X(llx_1), \ldots, \mu_X(llx_k)] \\ \mu_{L(X)}(lllx) &= llx_1 +\!\!+ \ldots +\!\!+ llx_k \ . \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy dwa różne wyrażenia (sytuacja ta przypomina poprzednie rozważania o własnościach włożenia η). Po kolejnym nałożeniu spłaszczenia μ na otrzymane wyrażenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu_X L(\mu_X)(lllx) &= \mu_X(llx_1) \mathbin{+\!\!+} \ldots \mathbin{+\!\!+} \mu_X(llx_k) \\ \mu_X \mu_{L(X)}(lllx) &= \mu_X(llx_1 \mathbin{+\!\!+} \ldots \mathbin{+\!\!+} llx_k) \\ &= \mu_X(llx_1) \mathbin{+\!\!+} \ldots \mathbin{+\!\!+} \mu_X(llx_k) \end{aligned}$$

Nasze rozważanie możemy podsumować następująco: diagram

$$\begin{tikzcd} & L(L(L(X))) \arrow[dl, "\mu_{L(X)}"'] \arrow[dr, "L(\mu_X)"] & \\ L(L(X)) \arrow[dr, "\mu_X"] & & L(L(X)) \arrow[dl, "\mu_X"'] \\ & L(X) & \end{tikzcd}$$

komutuje. Stosując zaś wyniki rozdziału o transformacjach naturalnych fakt ten możemy zapisać bardziej ogólnie, unikając odwołania do konkretnego obiektu X: diagram

$$\begin{tikzcd} & L^3 \arrow[dl, "\mu_L"'] \arrow[dr, "L(\mu)"] & \\ L^2 \arrow[dr, "\mu"] & & L^2 \arrow[dl, "\mu"'] \\ & L & \end{tikzcd}$$

w którym strzałki oznaczają naturalne transformacje, komutuje. Tutaj L^3 oznacza potrójne złożenie funktora L, czyli $L^3 = L \circ L \circ L$.

4 Definicja monady

Pojęcie monady zdefiniujemy w języku funktorów oraz naturalnych transformacji. Jest to wygodna metoda, ale istnieją też inne, równoważne metody. Wspomnimy o nich trochę później w tej części. Oto ta definicja:

Definicja 2 *Endofunktor $M : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy monadą, jeśli istnieją naturalne transformacje $\eta : I \overset{\bullet}{\to} M$ oraz $\mu : M^2 \overset{\bullet}{\to} M$ takie, że następujące dwa diagramy, w których strzałki oznaczają naturalne transformacje, komutują:*

$$
\begin{tikzcd}
 & M^2 \arrow[dd, "\mu_X"] & \\
M \arrow[ur, "\eta_M"] \arrow[dr, equal] & & M \arrow[ul, "M(\eta)"'] \arrow[dl, equal] \\
 & M &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & M^3 \arrow[dl, "\mu_M"'] \arrow[dr, "M(\mu)"] & \\
M^2 \arrow[dr, "\mu"'] & & M^2 \arrow[dl, "\mu"] \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

Widzimy, że pojęcie monady jest uogólnieniem operatora tworzenia list L. Diagramy opisujące własności transformacji η oraz μ są izomorficzne z diagramami tych transformacji dla list.

Przykład 3 *Istnieje wiele funktorów w kategorii* **Set**, *które nie są monadami. Takim banalnym przykładem jest funktor określony wzorami $Z(X) = \emptyset$ i $Z(f) = \emptyset$ dla wszystkich zbiorów X. Nie jest on monadą z trywialnego powodu: nie istnieją morfizmy $\eta_X : X \to \emptyset$ dla niepustych zbiorów X.*

Warto jednak zauważyć, że funktor S określony wzorami $S(X) = \{1\}$ i $S(f) = id_{\{1\}}$ jest monadą. Jak można łatwo się domyślić jest on mało użyteczny z programistycznego punktu widzenia.

Z kolei funktor T określony wzorami $T(X) = \{0,1\}$ i $T(f) = id_{\{0,1\}}$ nie jest monadą. Łatwo bowiem można zauważyć, że jedynymi naturalnymi transformacji z I do T są odwzorowania stałe $\eta = const_0$ lub $\eta = const_1$. A z tego łatwo wynika, że nie istnieje naturalna transformacja $\mu : T^2 \to T$ spełniająca warunek $\mu \circ \eta_T = id_T$.

A oto jak określone są operacje wkładania i spłaszczenia dla funktorów wymienionych w Rozdziale 1:

1. dla funktora identyczność: I: $\eta(x) = x$ i $\mu(x) = x$
2. dla funktora tworzenia list L: $\eta(x) = [x]$, $\mu([L1, \ldots, L_n]) = L1 + \!\!+ \ldots + \!\!+ L_n$
3. dla funktora Maybe M: $\eta(x) = x$, $\eta(x) = x$ i $\eta(\mathrm{Nothing}_{M(X)}) = \mathrm{Nothing}_X$
4. funktor Reader R_A (z ustalonym parametrem A): $\eta(x) = const_{A,x}$ i $\mu(\phi)(a) = (\phi(a))(a)$.
5. Dla funktora Writer W_A (z ustalonym monoidem $A = (U, \star, e)$): $\eta(x) = (x, e)$ i $\mu(((x,a),b)) = (x, a \star b)$.
6. dla funktora par $D(X)$: $\eta(x) = (x,x)$ i $\mu(((x_{1,1}, x_{1,1}), (x_{2,1}, x_{2,2}))) = (x_{1,1}, x_{2,2})$.

W artykule tym nie będziemy dowodzili powyższych faktów: autor jednak gorąco zachęca czytelnia do spokojnego i starannego **udowodnienia**ich prawdziwości. To są zadania które **każdy** informatyk pragnący posługiwać się monadami **musi** samodzielnie zrobić.

Uwaga 3 *Można mieć wrażenie, że funktor $I(X) = X$ jest mało pożyteczny z programistycznego punktu widzenia. Przydaje się on jednak nie tylko w rozważaniach teoretycznych: wykorzystywany jest, między innymi, to konstruowania prostych monad za pomocą tzw. transformat monad. A nam on się przyda do przyjrzenia się definicji monoidu w kategorii endofunktorów.*

W językach funkcyjnych monady definiowane są w inny sposób, przy użyciu innych pojęć. Jednym ze nich jest definiowanie monady za pomocą transformacji η oraz operatora "bind", oznaczanego w języku Haskell przez $>\!\!>\!=$, który dla elementu $mx \in M(X)$ oraz morfizmu $f : X \to M(Y)$ oblicza wartość $mx >\!\!>\!= f$ typu $M(Y)$. Operator ten zdefiniowany może być następująco:

$$(mx >\!\!>\!= f) = \mu(M(f)(mx))$$

Za pomocą operatora $>\!\!>\!=$ możemy zdefiniować transformację μ, mianowicie

$$(\mu \;\; mmx) = (mmx >\!\!>\!= id) \; .$$

W zastosowaniach do języków funkcyjnych pojęcie monady stosować będziemy do kategorii **Set**. Tym niemniej, pojęcie monady badać możemy w innych kategoriach. Rozważymy teraz jeden prosty przykład.

4.1 Monady w częściowych porządkach[2]

Bardzo proste przykłady kategorii powstają z częściowych porządków. Każdy częściowy porządek $\mathcal{X} = (X, \leq)$ traktować możemy jako kategorię $C(\mathcal{X})$, której obiektami są elementy zbioru X, morfizmami są pary uporządkowane $(x, y) \in X \times X$ takie, że $x \leq y$, zaś złożeniem morfizmów (x_1, y_1) i (x_2, y_2) jest określone jeśli $y_1 = x_2$ i jest równe (x_1, y_2). Mamy więc $ob(C(\mathcal{X})) = X$ oraz $morph(C(\mathcal{X})) = \leq$. Z przechodniości relacji $\leq$ wynika, że złożenie jest poprawnie określone. Zwrotność $\leq$ implikuje istnienie identyczności ($id_x = (x, x)$).

Kategoria $C(\mathcal{X})$ ma wiele specyficznych własności, na przykład, jeśli $f, g : x \to y$ to, $f = g$, czyli pomiędzy dowolnymi dwoma obiektami istnieje co najwyżej jeden morfizm. Kategoria ta ma element końcowy wtedy i tylko wtedy, gdy w częściowym porządku $\mathcal{X}$ istnieje element największy. I tak dalej.

Ustalmy teraz częściowy porządek $\mathcal{X}$.

Zacznijmy od przyjrzenia się pojęciu endofunktora w kategorii $C(\mathcal{X})$. Jest to odwzorowanie F, które obiektom przyporządkowuje obiekty (czyli $F \restriction X : X \to X$) oraz morfizmom przyporządkowuje morfizmy (czyli $F \restriction \leq : \leq \to \leq$), które ma, miedzy innymi, następującą własność: jeśli $\alpha : x \to y$ to $F(\alpha) : F(x) \to F(y)$. Lecz morfizmy w rozważanym przypadku pokrywają się z elementami relacji $\leq$, zatem własność ta równoważna następującej własności

$$(\forall x, y \in X)(x \leq y \to F(x) \leq F(y)) \; ,$$

czyli funkcja $f = F \restriction X$ jest funkcją zachowującą porządek $\leq$. Mamy też implikacją odwrotną, jeśli mamy daną funkcję $f : X \to X$ zachowującą porządek, położymy $F(x) = f(x)$ dla $x \in X$ i dla par $(x, y) \in X \times X$ takich, że $x \leq y$ położymy $F((x, y)) = (f(x), f(y))$, to F jest endofunktorem $C(\mathcal{X})$. Rzeczywiście, $F(id_x) = F((x, x)) = (F(x), F(x)) = id_{F(x)}$, oraz, jeśli $\alpha : x \to y$ i $\beta : y \to z$, to $\alpha = (x, y)$, $\beta = (y, z)$, $\beta \circ \alpha = (x, z)$ więc $F(\beta \circ \alpha) = F((x, z)) = (F(x), F(z)) = (F(y), F(z)) \circ (F(x), F(y)) = F(\beta) \circ F(\alpha)$. Zatem endofunktory kategorii $C(\mathcal{X})$ pokrywają się z odwzorowaniami z X do X zachowującymi porządek.

[2] Rozdział ten można pominąć.

Załóżmy teraz, że mamy dwa odwzorowania $f, g : X \to X$ zachowujące porządek. Niech F i G będą endomorfizmami $C(\mathcal{X})$ odpowiadającymi f i g, Załóżmy, że $\rho = (\rho_x)_{x \in X}$ jest rodziną morfizmów z $C(\mathcal{X})$ taką, że

$$(\forall x \in X)(\rho_x : F(x) \to G(x)) \ .$$

Oznacza to, że dla każdego $x \in X$ mamy $\rho_x = (f(x), g(x))$, czyli $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in X$. Zauważmy, że ta własność wystarczy na to aby ρ było naturalną transformacją między F i G. Rzeczywiście, jeśli $\alpha : x \to y$, to $\alpha = (x, y)$ i $x \leq y$, więc $F(x) \leq F(y)$, $G(x) \leq G(y)$, $F(x) \leq G(x)$, $F(y) \leq G(y)$ mamy równość $(F(y), G(y)) \circ (F(x), F(y)) = (G(x), G(y)) \circ (F(x), G(x))$ (gdyż w kategorii $C(\mathcal{X})$ jeśli istnieje morfizm między dwoma obiektami, to jest on jedyny. Można więc powiedzieć, że w kategorii $C(\mathcal{X})$ pojęcie naturalnych transformacji jest trywialne.

Załóżmy teraz, że $\eta : I \xrightarrow{\bullet} F$. Dla każdego $x \in X$ mamy wtedy $x \leq F(x)$. Co więcej, ta własność (czyli $(\forall x \in X)(x \leq F(x))$ wystarcza na to $\eta = ((x, F(x)))_{x \in X}$ było naturalną transformacją.

Załóżmy następnie, że $\mu : F^2 \xrightarrow{\bullet} F$. Wtedy, dla każdego $x \in X$ mamy $F^2(x) \leq F(x)$. Podobnie jak przed chwilą, własność ta wystarcza na to aby rodzina morfizmów $\mu = ((F^2(x), F(x)))_{x \in X}$ było naturalną transformacją.

Zauważmy ostatnią rzecz potrzebną do otrzymania prostej charakteryzacji monad w kategorii $C(\mathcal{X})$. Mianowicie, z nierówności $x \leq F(x)$ i z tego, że F jest funktorem wynika, że $F(x) \leq F^2(x)$, co w połączeniu z nierównością $F^2(x) \leq F(x)$ daje nam równość $F^2(x) = F(x)$.

Otrzymaliśmy więc następującą, bardzo prostą, charakteryzację monad w kategorii $C(\mathcal{X})$:

Wniosek 1 *Funktor $F : C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ jest monadą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $f : (X, \leq) \to (X, \leq)$ takie, że*

- $(\forall x, y \in X)(x \leq y \to f(x) \leq f(y))$
- $(\forall x \in X)(x \leq f(x))$
- $(\forall x \in X)(f^2(x) = f(x))$

oraz $F(x) = f(x)$ i $F((x, y)) = (f(x), f(y))$ dla takich $x, y \in X \times X$, że $x \leq y$.

A oto konkretny przykład: niech $\mathcal{X} = (P(\mathbb{N}), \subseteq)$ oraz niech $s(X)$ oznacza zbiór wszystkich skończonych sum elementów X, czyli

$$s(X) = \{\sum_{i=1}^{n} x_i : n \in \mathbb{N} \wedge x_1, \ldots, x_n \in X\} \ .$$

Odwzorowanie $s : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ spełnia założenia powyższego lematu, więc funktor zbudowany z odwzorowania s jest monadą.

5 Monoid w kategorii Set

Monoidem nazywamy strukturę algebraiczną $(M, \star, e)$ w której $\star$ jest binarnym działaniem łącznym zaś e jest elementem obustronnie neutralnym , czyli $(\forall x \in$

$$
\begin{tikzcd}
 & (M \times M) \times M \arrow[rr, shift left, "\alpha_{M,M,M}"] \arrow[dl, "\mu \times id_M"'] & & M \times (M \times M) \arrow[ll, shift left, "\alpha^{-1}_{M,M,M}"] \arrow[dr, "id_M \times \mu"] & \\
M \times M \arrow[drr, "\mu"'] & & & & M \times M \arrow[dll, "\mu"] \\
 & & M & &
\end{tikzcd}
$$

Rysunek 2: Łączność mnożenia w monoidzie

$M)(x \star e = e \star x = x)$. Naszym celem jest zapisanie tej definicji w języku Teorii Kategorii pracując w kategorii **Set**.

Zacznijmy od wprowadzenia pojęcie iloczynu kartezjańskiego dwóch odwzorowań: jeśli $f : A \to B$ oraz $g : C \to G$, to przez $f \times g$ oznaczamy odwzorowanie ze zbioru $A \times C$ w zbiór $B \times D$ określone wzorem

$$(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$$

(wkrótce uogólnimy to pojęcie). Niech również $\alpha_{A,B,C} : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$ będzie bijekcją określoną wzorem

$$\alpha_{A,B,C}(((a, b), c)) = (a, (b, c)) \ .$$

Z wyrażeniem własności działania $\star$ nie ma większych kłopotów: jest to odwzorowanie (czyli morfizm kategorii **Set**) ze zbioru $M \times M$ w zbiór M. Zastosujemy notację prefiksową: $\mu(x, y) = x \star y$. Łączność działanie $\star$ w tej notacji zapisuje się następująco:

$$\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z)) \ .$$

W języku Teorii Kategorii łączność μ możemy wyrazić za pomocą komutowania diagramu z Rysunku 2, gdzie id_M oznacza identyczność obiektu M (czyli, identyczność na zbiorze M).

Problemem z którym musimy sobie poradzić to odwoływanie się w definicji monoidu do wyróżnionego elementu e ze zbioru M. Kategoria **Set** ma jednak obiekty końcowe: są nimi dowolne zbiory jednoelementowe. Ustalmy więc jakieś $\bullet$ oraz niech $I = \{\bullet\}$. Element e zinterpretujmy jako funkcję $\eta : I \to M$.

Zauważmy, że $id_M \times \eta : M \times I \to M \times M$ oraz $\eta \times id_M : I \times M \to M \times M$. oraz, że $(\mu \circ (id_M \times \eta))((x, \bullet)) = x$ i $(\mu \circ (\eta \times id_M))((\bullet, x)) = x$ dla każdego $x \in M$.

Wprowadźmy jeszcze dwie bijekcje $\lambda_M : I \times M \to M$ oraz $\rho_M : M \times I \to M$ zadane wzorami $\lambda_M((\bullet, x)) = x$ oraz $\rho_M((x, \bullet)) = x$. Teraz, to, że e jest elementem neutralnym monoidu M możemy wyrazić jako komutowanie następującego diagramu:

A oto definicja monoidu w kategorii **Set**:

Definicja 3 *Obiekt M nazywamy monoidem w kategorii* **Set**, *jeśli istnieją morfizmy $\eta : I \to M$ oraz $\mu : M \times M \to M$ takie, że diagramy z Rysunku 2 oraz Rysunku 3 komutują, gdzie I oznacza element końcowy kategorii* **Set**.

Definicją tę wkrótce uogólnimy, ale przedtem musimy uogólnić pojęcie iloczynu kartezjańskiego.

$$\begin{tikzcd}
& M \times M \arrow[dd, "\mu"] & \\
I \times M \arrow[ur, "\eta \times id_M"] \arrow[dr, "\lambda_M"'] & & M \times I \arrow[ul, "id_M \times \eta"'] \arrow[dl, "\rho_M"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Rysunek 3: Definicja elementu neutralnego w monoidzie

6 Produkt kategorii

Istnieje wiele metod tworzenia nowych kategorii z danych kategorii. Dobrze znaną i bardzo pożyteczną metodą jest konstrukcja kategorii dualnej: mając kategorię $\mathcal{C}$ tworzymy kategorię $\mathcal{C}^{op}$, której obiektami są obiekty kategorii $\mathcal{C}$, zaś $f : X \to Y$ jest morfizmem w $\mathcal{C}^{op}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f : Y \to X$ jest morfizmem kategorii $\mathcal{C}$. Złożenie $\star$ morfizmów w $\mathcal{C}^{op}$ jest zdefiniowane wzorem $f \star g = g \circ f$, gdzie $\circ$ jest złożeniem w kategorii $\mathcal{C}$.

Omówimy teraz tworzenie produktu dwóch kategorii. Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą dwoma kategoriami. Obiektam kategorii produktowej $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ są wszystkie pary uporządkowane (X, Y) takie, że X jest obiektem $\mathcal{C}$ zaś Y jest obiektem kategorii $\mathcal{D}$. Morfizmami w $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ są pary (f, g) takie, że $f : X_1 \to X_2$ jest morfizmem w $\mathcal{C}$ oraz że $g : Y_1 \to Y_2$ jest morfizmem w $\mathcal{D}$. Złożenia w tej kategorii określamy w następujący sposób: jeśli $(f, g) : (X_1, Y_1) \to (X_2, Y_2)$ oraz $(k, l) : (X_2, Y_2) \to (X_3, Y_3)$ są morfizmami w $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, to ich złożenie określamy wzorem

$$(k, l) \circ (f, g) = (k \circ f, l \circ g) \; .$$

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są kategoriami oraz jeśli $\Phi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest funktorem, to dla dowolnych obiektów X_1, X_2, Y_1, Y_2 kategorii $\mathcal{C}$ oraz morfizmów $f : X_1 \to Y_1$ oraz $g : X_2 \to Y_2$ mamy

$$\Phi((f, g)) : \Phi((X_1, X_2)) \to \Phi((Y_1, Y_2)) \; .$$

W dalszych rozważaniach będziemy stosowali infiksową notacją na takie funktory: $X \otimes Y = \Phi((X, Y))$ oraz $f \otimes g = \Phi((f, g)$. Korzystając z tych oznaczeń powyższą obserwację możmy zapisać następująco:

$$f \otimes g : X_1 \otimes X_2 \to Y_1 \otimes Y_2 \; .$$

7 Kategorie monoidalne

Jednym z funktorów z kategorii $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$ w kategorię $\mathbf{Set}$ jest funktor określony wzorami $A \otimes B = A \times B$ i $(f \otimes g)((a, b)) = (f(a), g(b))$. Poprzednio ten iloczyn $f \otimes g$ oznaczaliśmy przez $f \times g$. Pewnym problemem pojawiającym się przy pracy z iloczynem kartezjańskim zbiorów jest to, że nie jest on łączny: poza nielicznymi przypadkami mamy $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. Jednakże działanie to „prawie że” jest łączne. Otóż, w kategorii set mamy rodzinę morfizmów $\alpha = (\alpha_{A,B,C})_{A,B,C \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})}$ takich, że $\alpha_{A,B,C} : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}"] \arrow[d, "(f \otimes g) \otimes h"'] & A \times (B \times C) \arrow[d, "f \otimes (g \otimes h)"] \\
(A' \otimes B') \otimes C' \arrow[r, "\alpha_{A',B',C'}"] & A' \otimes (B' \oplus C')
\end{tikzcd}$$

Rysunek 4: Łączność mnożenia w monoidzie

określonych wzorami

$$\alpha_{A,B,C}(((a,b),c)) = (a,(b,c)) \ .$$

Rodzina odwzorowań α jest naturalną transformacją ze względu na wszystkie swoje trzy współrzędne. Dokładniej, jeśli $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ i $h : C \to C'$ to diagram z Rysunku 4 komutuje, czyli, że

$$(f \otimes (g \otimes h)) \circ \alpha_{A,B,C} = \alpha_{A',B',C'} \circ ((f \otimes g) \otimes h) \ .$$

Co więcej, każdy morfizm $\alpha_{A,B,C}$ jest **izomorfizmem**.

Dosyć podobnie w kategorii **Set** przedstawia się sprawa mnożenia przez elementy końcowe. Otóż, co prawda, poza trywialnym przypadkami, mamy $\{*\} \times X \neq X$ oraz $X \times \{*\} \neq X$, lecz istnieją naturalne transformacje $\lambda_X : \{*\} \times X \to X$ i $\rho_X : X \times \{*\} \to X$. Zadane są one wzorami $\lambda((*,x)) = x$ oraz $\rho((x,*)) = x$. Podobnie jak poprzednio są one izomorfizmami.

Mamy teraz wszystkie pojącia potrzebne do zdefiniowania pojęcia kategorii monoidalnej.

Definicja 4 *Kategorią monoidalną nazywamy szóstkę $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ o następujących własnościach:*

1. *$\mathcal{C}$ jest kategorią*

2. *$\oplus$ jest funktorem z $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ w $\mathcal{C}$*

3. *I jest wyróżnionym elementem $\mathcal{C}$ (zwanym identycznością)*

4. *$\alpha = (\alpha_{A,B,C})_{A,B,C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ jest naturalnym izomorfizmem takim, że*

$$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$$

5. *$\lambda = (\lambda_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ jest naturalnym izomorfizmem takim, że*

$$\lambda_X : I \otimes X \to X$$

6. *$\rho = (\rho_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ jest naturalnym izomorfizmem takim, że*

$$\rho_X : X \otimes I \to X$$

7. *następujące dwa diagramy komutują*

$$
\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha \otimes id"] & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha"] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "id \otimes \alpha"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
((A \otimes I) \otimes C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\rho \otimes id"] & A \otimes (I \otimes C) \arrow[d, "id \otimes \lambda"] \\
(A \otimes C) \arrow[r, equal] & A \otimes C
\end{tikzcd}
$$

Wśród osób po raz pierwszy widzących definicję kategorii moniodalnej lekki niepokój może budzić ostatni punkt definicji: owo komutowania dwóch diagramów. Zauważmy jednak, że w kategorii **Set** z iloczynem kartezjańskim komutowanie to jest trywialne. Po drugie, w kategorii endomorfizmów, którą się wkrótce zajmiemy, będziemy mieli równość: $(F \otimes G) \otimes H = F \otimes (G \otimes H)$, $I \otimes F = F \otimes I = F$, więc w tej kategorii wszystkie trzy naturalne izomorfizmy α, λ i ρ są identycznościami, więc owo komutowanie jest również trywialne.

Prototypem kategorii monoidalnych jest kategoria skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ustalonym ciałem K z iloczynem tensorowym przestrzeni wektorowych. Kategoria jest ważna dla wszystkich osób interesujących się podstawami logicznymi obliczeń kwantowych, lecz dla naszych celów, czyli dla zrozumienia pojęcia monady w terminach kategoryjnych nie jest potrzebna znajomość pojęcia iloczynu tensorowego przestrzeni wektorowych.

Zakończymy rozważania dwoma przykładami, a następnym rozdziale omówimy kolejny przykład.

Przykład 4 (Kategoria Set) *Kategoria* **Set** *staje się kategorią monoidalną jeśli za produkt $\otimes$ przyjmiemy iloczyn kartezjański zbiorów. Wszystkie potrzebne naturalne odwzorowania zdefiniowaliśmy na począczku tego rozdziału.*

Przykład 5 (Kategoria $P(\Omega)$) *Ustalmy zbiór Ω. Potraktujemy częściowy porządek $(P(\Omega), \subseteq)$ jako kategorię. Dla $A, B \in P(\Omega)$określmy $A \otimes B = A \cap B$. Niech $\alpha_{A,B,C} = id_{A \cap B \cap C}$, $\lambda_A = \rho_A = id_A$. Łatwo sprawdzić, że struktura $(P(\Omega), \otimes, \Omega, \lambda, \rho)$ jest kategorią monoidalną.*

7.1 Monoid w kategorii monoidalnej

Narzędzia kategorii monoidalnych pozwala na zdefiniowanie pojęcia monoidu w takich kategoriach. Jest to proste uogólnianie pojęcia monoidu z kategorii **Set**. Ustalmy bowiem taką kategorię $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$. Obiekt $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ nazywać będzimy **monoidem** jeśli istnieją morfizmy $\eta : I \to M$ oraz $\mu : M \otimes M \to M$ takie, że następujące dwa diagramy

$$
\begin{tikzcd}
& M \otimes M \arrow[dd, "\mu"] & \\
I \otimes M \arrow[ur, "\eta \otimes id"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & M \otimes I \arrow[ul, "id \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (M \otimes M) \otimes M \arrow[ld, "\mu\otimes id"'] \arrow[rr, shift left, "\alpha"] & & M \otimes (M \otimes M) \arrow[ll, shift left, "\alpha^{-1}"] \arrow[rd, "id\otimes\mu"] & \\
M \otimes M \arrow[rrd, "\mu"'] & & & & M \otimes M \arrow[lld, "\mu"] \\
 & & M & &
\end{tikzcd}
$$

komutują. Zauważmy, że są to kopie diagramów z Rysunków 3 oraz 2: symbol iloczynu kartezjańskiego $\times$ zastąpiliśmy symbolem $\otimes$; pozbyliśmy się też indeksów dolnych w morfizmach α, λ i ρ, gdyż wynikają one jasno z kontekstu.

Zauważmy, że jeśli definicją tę zastosujemy do kategorii **Set** z iloczynem $X \otimes Y = X \times Y$ to otrzymamy standardową, omówioną już definicję.

8 Składanie naturalnych transformacji

Ustalmy dwie kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$. Symbolem $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ oznaczamy klasę wszystkich funktorów z kategorii $\mathcal{C}$ w kategorię $\mathcal{D}$. Klasę tę traktować będziemy jako kategorię, w której morfizmami są naturalne odwzorowania między funktorami. Konstrukcja ta jest poprawna, gdyż jeśli F, G, H są elementami $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ oraz $\rho : F \overset{\bullet}{\to} G$ $\psi : G \overset{\bullet}{\to} H$, to $\psi \circ \rho : F \overset{\bullet}{\to} H$ (sprawdzenie tego łatwego faktu pozostawimy czytelnikowi). Opisane właśnie złożenie transformacji naturalnych nazywamy **złożeniem wertykalnym** i zilustrować to możemy następującym diagramem:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{name=G, description}] \arrow[r, bend right=60, "H"'{name=H}] & \mathcal{D}
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\rho"]
\arrow[from=G, to=H, Rightarrow, "\psi"]
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=H}] & \mathcal{D}
\arrow[from=F, to=H, Rightarrow, "\psi\circ\rho"]
\end{tikzcd}
$$

Potrzebne nam będzie jeszcze jedna metoda składania odwzorowań naturalnych. Rozważmy trzy kategorie $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, funktory $F, G : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $K, L : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ oraz naturalne transformacje $\rho : F \overset{\bullet}{\to} G$ oraz $\psi : K \overset{\bullet}{\to} L$ (ilustruje to diagram z lewej strony poniższego rysunku).

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=G}] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "K"{name=K}] \arrow[r, bend right=50, "L"'{name=L}] & \mathcal{E}
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\rho"]
\arrow[from=K, to=L, Rightarrow, "\psi"]
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "K\circ F"{name=KF}] \arrow[r, bend right=50, "L\circ G"'{name=LG}] & \mathcal{E}
\arrow[from=KF, to=LG, Rightarrow, "\psi\otimes\rho"]
\end{tikzcd}
$$

Złożenia $K \circ F$ oraz $L \circ G$ są funktorami z kategorii $\mathcal{C}$ do kategorii $\mathcal{E}$. Pokażemy jak z naturalnych transformacji ϕ i ρ można zbudować naturalną transformację z $K \circ F$ do $L \circ G$. Ustalmy w tym celu $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ i zaobserwujmy, że

1. $\rho_X : F(X) \to G(X)$ jest morfizmem z $\mathcal{C}$;
2. więc $K(\rho_X) : K(F(X)) \to K(G(X))$ jest morfizmem w kategorii $\mathcal{D}$;
3. dla dowolnego $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ mamy $\psi_Y : K(Y) \to L(Y)$;
4. podstawiając w (3) za Y obiekt $G(X)$ mamy $\psi_{G(X)} : K(G(X)) \to L(G(X))$;

5. zatem $\psi_{G(X)} \circ K(\rho_X) : K(F(X)) \to L(G(X))$.

Połóżmy
$$(\psi \otimes \rho)_X = \psi_{G(X)} \circ K(\rho_X) \ ,$$
oraz $\psi \otimes \rho = ((\psi \otimes \rho)_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$. Pokażemy teraz, że tak zdefiniowana rodzina odwzorowań $\psi \otimes \rho$ jest naturalną transformacją. Ustalmy w tym celu dowolny morfizm $f : X \to Y$ z kategorii $\mathcal{C}$. Z tego, że ρ jest naturalną transformacją wynika, że następujący diagram

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\rho_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

komutuje. Po nałożeniu na ten diagram funktora K otrzymujemy komutowanie następującego diagramu

$$\begin{tikzcd}
K(F(X)) \arrow[r, "K(\rho_X)"] \arrow[d, "K(F(f))"'] & K(G(X)) \arrow[d, "K(G(f))"] \\
K(F(Y)) \arrow[r, "K(\rho_Y)"] & K(G(Y))
\end{tikzcd}$$

Zauważmy teraz, że $G(f) : G(X) \to G(Y)$ w kategorii $\mathcal{D}$. Korzystając z naturalności ψ otrzymujemy komutowanie następującego diagramu:

$$\begin{tikzcd}
K(G(X)) \arrow[r, "\psi_{G(X)}"] \arrow[d, "K(G(f))"'] & L(G(X)) \arrow[d, "L(G(f))"] \\
K(G(Y)) \arrow[r, "\psi_{G(Y)}"] & L(G(Y))
\end{tikzcd}$$

Połączmy oba otrzymane diagramy (użyte kolory mogą trochę pomóc w zorientowaniu się jak to połączenie wygląda):

$$\begin{tikzcd}
K(F(X)) \arrow[r, "K(\rho_X)"] \arrow[d, "K(F(f))"] & K(G(X)) \arrow[r, "\psi_{G(X)}"] \arrow[d, "K(G(f))"] & L(G(X)) \arrow[d, "L(G(f))"] \\
K(F(Y)) \arrow[r, "K(\rho_Y)"] & K(G(Y)) \arrow[r, "\psi_{G(Y)}"] & L(G(Y))
\end{tikzcd}$$

Wewnętrzne kwadraty w tym diagramie komutują, zatem i cały diagram komutuje, zatem

$$(L \circ G)(f) \circ (\psi \otimes \rho)_X = (\psi \otimes \rho)_Y \circ (K \circ F)(f) \ ,$$

więc $\psi \otimes \rho : K \circ F \xrightarrow{\bullet} L \circ G$.

Omówiona powyżej metoda składania naturalnych transformacji nazywa się **złożeniem horyzontalnym**. Oznaczyliśmy ją symbolem $\otimes$, gdyż to się nam przyda w dalszych rozważaniach. W literaturze się stosuje również inne oznaczenia (np. $(\rho; \phi)$). Przeliczmy teraz kilka przykładów.

Przykład 6 *Załóżmy, że $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ jest funktorem, oraz, że $\eta : I \xrightarrow{\bullet} F$, gdzie I jest funktorem identycznościowym z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{C}$. Rozważmy następujący diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "I"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Wtedy $(id \otimes \eta)_X = id_{F(X)} \circ F(\eta_X) = F(\eta_X)$ zatem

$$id \otimes \eta = F(\eta) \ , \tag{1}$$

no i, ponieważ $F \circ I = F$ mamy $id \otimes \eta : F \stackrel{\bullet}{\to} F^2$, gdzie $F^2 = F \circ F$.

Przykład 7 *Załóżmy, podobnie jak w poprzednim przykładzie, że $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ jest funktorem, oraz, że $\eta : I \stackrel{\bullet}{\to} F$, gdzie I jest funktorem identycznościowym z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{C}$. Rozważmy następujący diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "I"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Wtedy $(\eta \otimes id)_X = \eta_{F(X)} \circ F(id_X) = \eta_{F(X)}$ zatem

$$\eta \otimes id = \eta_F \ , \tag{2}$$

no i ponownie mamy $\eta \otimes id : F \stackrel{\bullet}{\to} F^2$.

Przykład 8 *Załóżmy, że $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ jest funktorem, oraz, że $\mu : F^2 \stackrel{\bullet}{\to} F$. Rozważmy następujący diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F^2"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Wtedy $(id \otimes \mu)_X = id_{F(X)} \circ F(\mu_X) = F(\mu_X)$ zatem

$$id \otimes \mu = F(\mu) \ , \tag{3}$$

no i, oczywiście, mamy $id \otimes \mu : F^3 \stackrel{\bullet}{\to} F^2$.

Przykład 9 *Załóżmy, podobnie jak w poprzednim przykładzie, że $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ jest funktorem, oraz, że $\mu : F^2 \stackrel{\bullet}{\to} F$. Rozważmy następujący diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F^2"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Wtedy $(mu \otimes id)_X = \mu_{F(X)} \circ F(id_X) = \mu_{F(X)}$ zatem

$$\mu \otimes id = \mu_F \ , \tag{4}$$

no i, oczywiście, mamy $id \otimes \mu : F^3 \stackrel{\bullet}{\to} F^2$.

9 Kategorie endofunktorów

W rozdziale tym będziemy zajmowali się kategorią $\mathrm{Endo}(\mathcal{C}) = [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$, czyli kategorii wszystkich endofunktorów kategorii $\mathcal{C}$. Przypomnijmy, że obiektami $\mathrm{Endo}(\mathcal{C})$ są wszystkie funktory z $\mathcal{C}$ w $\mathcal{C}$, czyli endofunktory kategorii $\mathcal{C}$. Zauważmy, że funktor identycznościowy I kategorii $\mathcal{C}$ jest endomorfizmem.

Zauważmy następnie, że $\mathrm{Endo}(\mathcal{C})$ jest kategorią monoidalną, z produktem $\otimes : \mathrm{Endo}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Endo}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Endo}(\mathcal{C})$ określonym dla pary endofunktorów (F, G) wzorem

$$F \otimes G = F \circ G$$

oraz iloczynem $\rho \otimes \psi$ naturalnych transformacji określonym jako ich złożenie horyzontalne. Elementem neutralny jest endomorfizm identycznościowy I.

Zauważmy, że $F\circ(G\circ H) = (F\circ G)\circ H$, więc $F\otimes(G\otimes H) = (F\otimes G)\otimes H$, a więc w kategorii $\mathrm{Endo}(\mathcal{C})$ mamy $\alpha_{F,G,H} = id_{F\circ(G\circ H)}$. Podobnie $I \otimes F = I \circ F = F$ oraz $F \otimes I = F \circ I = F$, więc w tej kategorii mamy $\lambda_F = id_F$ i $\rho_F = id_F$ (takie kategorie monoidalne w których izomorfizmy α, λ i ρ są identycznościami nazywamy **ścisłymi kategoriami monoidalnymi**).

W Rozdziale 7.1 zdefiniowaliśmy pojecie monoidu w kategorii monoidalnej. Przepiszemy teraz to pojęcie korzystając z tego co wiemy o własności kategorii monoidalnej $\mathrm{Endo}(\mathcal{C})$. Zatem, obiekt $M \in \mathrm{Endo}(\mathcal{C})$ jest monoidem jeśli istnieją morfizmy (czyli w naszym przypadku naturalne transformacje) $\eta : I \xrightarrow{\bullet} M$ oraz $\mu : M \otimes M \xrightarrow{\bullet} M$ takie, że następujące dwa diagramy

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes M \arrow[dd, "\mu"] & \\
I \otimes M \arrow[ur, "\eta\otimes id"] \arrow[dr, equal] & & M \otimes I \arrow[ul, "id\otimes\eta"'] \arrow[dl, equal] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (M \otimes M) \otimes M \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "\mu\otimes id"'] & & M \otimes (M \otimes M) \arrow[dr, "id\otimes\mu"] & \\
M \otimes M \arrow[drr, "\mu"'] & & & & M \otimes M \arrow[dll, "\mu"] \\
 & & M & &
\end{tikzcd}$$

komutują. Strzałki odpowiadające morfizmom α, λ i ρ zastąpiliśmy równościami (bo $\mathrm{Endo}(\mathcal{C})$ jest ścisłą kategorią monoidalną). Korzystając z oznaczeń $M \otimes (M\otimes M) = M^3$, $M\otimes M = M^2$, z tego $I\otimes M = I\circ M = M$ oraz $M\otimes I = M\circ I = M$ i spłaszczając górny wiersz w drugim diagramie otrzymujemy następujące dwa diagramy:

$$\begin{tikzcd}
 & M^2 \arrow[dd, "\mu"] & \\
M \arrow[ur, "\eta\otimes id"] \arrow[dr, equal] & & M \arrow[ul, "id\otimes\eta"'] \arrow[dl, equal] \\
 & M &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & M^3 \arrow[dl, "\mu\otimes id"'] \arrow[dr, "id\otimes\mu"] & \\
M^2 \arrow[dr, "\mu"'] & & M^2 \arrow[dl, "\mu"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Skorzystajmy teraz z równości (1), (2), (3) i (4) otrzymujemy dwa diagramy definujące monadę z Definicji 2. Osiągnęliśmy więc nasz cel. **Monada to monoid w kategorii endofunktorów, w której morfizmami są transformacje naturalne, traktowanej jako kategoria monoidalna z produktem zdefiniowanym jako złożenie funktorów oraz horyzontalnym złożeniem transformacji naturalnych.**

Literatura

[1] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, **1978**

[2] B. C. Pierce, *Basic Category Theory for Computer Scientists*, MIT, **1991**

Indeks