Rachunek Prawdopodobieństwa

Jacek Cichoń
WPPT PWr, 2012

Podstawowe pojęcia

Def. Rodzinę $\mathcal{S}$ podbiorów zbiorów Ω nazywamy ciałem zbiorów jeśli

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$
2. $A, B \in \mathcal{S} \to A \cup B \in \mathcal{S}$
3. $A \in \mathcal{S} \to A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{S}$

Def. Ciało zbiorów $\mathcal{S}$ nazywamy σ-ciałem jeśli dla każdego ciagu $(A_n)_{n\geq 1}$ elementów $\mathcal{S}$ mamy $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{S}$

Def. Przestrzenią probabilistyczna nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{S}, \mathrm{P})$ taką, że $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω oraz P jest funkcją taką, że

1. $\mathrm{P} : \mathcal{S} \to [0,1]$
2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
3. dla dowolnego ciągu przeliczalnego $(A_n)_{n\geq 1}$ elementów ciała $\mathcal{S}$ **parami rozłącznych** mamy

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

.

Terminologia

1. zdarzenie elementarne $\equiv$ element zbioru Ω:
2. zdarzenie $\equiv$ element σ-ciała $\mathcal{S}$
3. $\mathrm{P}(A)$: prawdopodobieństwo zbioru A

Podstawowe własności

1. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
2. Jeśli $A, B \in \mathcal{S}$ oraz $A \cup B = \emptyset$, to $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$
3. Jeśli $A, B \in \mathcal{S}$ oraz $A \subseteq B$, to $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$

W szczególności: jeśli $a \neq b$ to $\mathrm{P}(\{a,b\}) = \mathrm{P}(\{a\}) + \mathrm{P}(\{b\})$.
Tw. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$
Tw. Jeśli $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, to $\mathrm{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_n \mathrm{P}(A_n)$.
Tw. Jeśli $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, to $\mathrm{P}(\bigcap_n A_n) = \lim_n \mathrm{P}(A_n)$.

Podstawowe przykłady

1. **Kombinatoryczna przestrzeń probabilistyczna:** Ω - zbiór skończony; $\mathcal{S}$ = rodzina wszystkich podzbiorów zbioru Ω; $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
2. **Kwadrat**: $\Omega = [0,1]^2$; $\mathcal{S}$ = rodzina wszystkich podzbiorów Ω dla których potrzfimy policzyć powierzchnię (formalnie: np. σ-ciał podzbiorów borelowskich kwadratu); $\mathrm{P}(A)$= "powierzchnia zbioru A"
3. **Przestrzeń probabilistyczna dyskretna**. Mamy ustalony zbiór przeliczalny Ω. Mamy dany ciąg liczb rzeczywistych dodatnich $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ takich, że $\sum_\omega p_\omega = 1$. Za $\mathcal{S}$ przyjmujemy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru Ω. Dla $A \in \mathcal{S}$ kładziemy $\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$.

Niezależność

Def. Zdarzenia $\{A_t : t \in T\}$ są niezależne jeśli dla dowolnego niepustego i skończonego podzbioru $S \subseteq T$ mamy

$$\mathrm{P}([) \cap_{s\in S} A_s = \prod_{s\in S} \mathrm{P}(A_s) \ .$$

Wniosek: Zdarzenia A i B są niezależne jeśli $\mathrm{P}(A \cap B) = \Pr A \cdot \Pr B$.
Przykład (Kostka Kołmogorowa) przestrzeń kombinatoryczna: $\Omega = \{r, g, b, w\}$, $R = \{r, w\}$, $G = \{g, w\}$, $B = \{b, w\}$. Zdarzenia R, G, B są parami niezależne ale nie są niezależne.
Def. (**Prawdopodobieństwo warunkowe**) Jeśli $\mathrm{P}(B) > 0$ to

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Wniosek: Jeśli A i B są niezależne, to $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$.
Tw. [O prawdopodobieństwie całkowitym] Jeśli zdarzenia $B_1, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ oraz $\mathrm{P}(B_i) > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$, to

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_i) \cdot \mathrm{P}(B_i)$$

Tw. [Wzór Bayesa] Jeśli zdarzenia $B_1, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, $A \subseteq B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ oraz $\mathrm{P}(B_i) > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$, to

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B_i) \cdot \mathrm{P}(B_i)}{\mathrm{P}(A)}$$

Zmienne losowe

Def. Zmienną losową nazywamy funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ taką, że

$$(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{S})$$

Tw. Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne

1. X jest zmienną losową
2. $(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{S})$
3. $(\forall a \in \mathbb{R})(f^{-1}((a, \infty) \in \mathcal{S})$
4. $(\forall a, b \in \mathbb{R})(f^{-1}((a, b) \in \mathcal{S})$

Def. Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$F_X(t) = \mathrm{P}(X \leq t) \quad \left(= \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})\right)$$

Tw. Niech F będzie dystrybuantą pewnej zmiennej losowej. Wtedy

1. $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$
2. $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$
3. $(\forall a \in \mathbb{R}) \lim_{t\to a+} F(t) = F(a))$

Def. Zmienna ma rozkład ciągły jeśli isnieje funkcja $f \geq 0$ taka, że $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt$.
Tw. Jeśli f jest gęstością zmiennej losowej X, to $\Pr(X \in [a,b]) = \int_a^b f(t)dt$
Tw. Jeśli dystrybuanta F_X jest ciągła oraz U ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$ to zmienna losowa $F^{-1} \circ U$ ma dystrybuantę F_X.

Wartość oczekiwana

Ogólna definicja: $\mathrm{E}(X) = \int_\Omega g(X(\omega))dP(\omega)$

1. Dla zmiennej losowej dyskretnej o wartościach w zbiorze $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ $\mathrm{E}(g(X)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} g(x_k) \Pr(X = x_k)$
2. W szczególności, jeśli X przyjmuje wartości w zbiorze liczb naturalnych, to $\mathrm{E}(g(X)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} g(k) \Pr(X = k)$
3. Jeśli X ma gęstość f to $\mathrm{E}(g(X)) = \int_\mathbb{R} g(t)f(t)dt$
4. W szczególności: jeśli X ma gęstość f to $\mathrm{E}(X) = \int_\mathbb{R} tf(t)dt$
5. W szczególności: jeśli X ma gęstość f to $\mathrm{E}(X^2) = \int_\mathbb{R} t^2 f(t)dt$

Tw. $\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y)$
Def. $\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$
Tw. $\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$
Tw. $\mathrm{var}(aX + b) = a^2\mathrm{var}(X)$

Podstawowe nierówności

Tw. [Markov]Jeśli $X \geq 0$ i $a > 0$ to $\Pr[X > a] \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}$
Tw. [Czebyszew] $\Pr(|X - \mathrm{E}(X)| > a) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{a^2}$
Tw. [Cauchy] $\mathrm{E}(XY) \leq \sqrt{\mathrm{E}(X^2)}\sqrt{\mathrm{E}(Y^2)}$

Funkcje tworzące

Def. Funkcją tworzącą zmiennej losowej X nazywamy funkję zadaną wzorem $\phi_X(t) = \mathrm{E}(t^X)$

Jeśli $\mathrm{rng}(X) \subseteq \mathbb{N}$ to

$$\phi_X(t) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(X = k) z^k \ .$$

Tw. Niech $\phi_X(t)$ będzie funkcją tworząca zmiennej losowej X. Wtedy
1. $\phi_X(t)(1) = 1$
2. $\phi'_X(1) = \mathrm{E}(X)$
3. $\phi''_X(1) = \mathrm{var}(X) - \mathrm{E}(X)$

Wniosek: $\mathrm{var}(X) = \phi''_X(1) + \mathrm{E}(X) - (\mathrm{E}(X))^2$.

Zmienne niezależne

Def. Zmienne X i Y są niezależne, jeśli dla dowolnych a, b zbiory $X^{-1}((-\infty, a))$ i $Y^{-1}((-\infty, b))$ są niezalezne

Definicja ta w sposób naturalny rozciaga się na dowolna rodzine zbiorów

Tw. Jeśli $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne, to $\mathrm{var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{var}(X_1) + \ldots + \mathrm{var}(X_n)$

Twierdzenia graniczne

Tw. [Słabe prawo wielkich liczb] Jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathrm{E}(X_k) = \mu$ i $\mathrm{var}(X_k) = \sigma^2$ to

$$(\forall \epsilon > 0)\left(\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = 0\right)$$

Tw. [Silne prawo wielkich liczb] Jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, maja wspólny rozkład $\mathrm{E}(X_k) = \mu$ i $\mathrm{var}(X_k) = \sigma^2 < \infty$ to

$$\Pr\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mu)\right) = 1$$

Tw. [Centralne twierdzenie graniczne] Jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, maja wspólny rozkład, $\mathrm{E}(X_k) = \mu$ i $\mathrm{var}(X_k) = \sigma^2 < \infty$ oraz $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, to dla każego t

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-x^2/2)dx$$

Przykłady zmiennych losowych

Rozkład Bernoulliego

Def. $X \sim \mathrm{B}(p) \equiv (\mathrm{P}(X = 1) = p \wedge \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p)$
Tw. Jeśli $X \sim \mathrm{B}(p)$ to $\mathrm{E}(X) = p$, $\mathrm{var}(X) = p(1-p)$

Rozkład Dwumianowy

Def. $X \sim \mathrm{Bin}(n, p) \equiv \mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Tw. Jeśli $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ to $\mathrm{E}(X) = np$, $\mathrm{var}(X) = np(1-p)$
Tw. Jeśli $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne oraz $X_i \sim \mathrm{B}(p)$ dla $i = 1, 2 \ldots, n$ to $X_1 + \ldots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Rozkład Geometryczny

Def. $X \sim \mathrm{Geo}(p) \equiv \mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1$
Tw. Jeśli $X \sim \mathrm{Geo}(n, p)$ to $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$, $\mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Rozkład Poissona

Def. $X \sim \mathrm{Po}(\lambda) \equiv \mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{e^\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \geq 0$
Tw. Jeśli $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ to $\mathrm{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{var}(X) = \lambda$

Rozkład Normalny

Def. Zmienna losowa ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ jeśli ma gęstość $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2})$
Tw. Jeśli $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ to $\mathrm{E}(X) = \mu$ oraz $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$.
Tw. Jeśli $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ oraz X i Y są niezależne to $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Rozkład Jednostajny

Def. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}(a, b)$ w odcinku $[a, b]$ jeśli $\Pr[X <= t] = (t-a)/(b-a)$ dla $t \in [a, b]$.
Tw. Jeśli $X \sim \mathrm{Unif}(a, b)$ to $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Rozkład Jednostajny na zbiorze skończonym

Def. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}(\{a, \ldots, b\})$ w zbiorze $\{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$ jeśli $\Pr[X = k] = 1/(b-a+1)$ dla $t \in \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$.
Tw. Jeśli $X \sim \mathrm{Unif}(\{a, \ldots, b\})$ to $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ oraz $\mathrm{var}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.