

# Wstęp do Informatyki i Programowania

## Ćwiczenia: Lista 6

Przemysław Kobyłański

Zadania 6–8 zaczerpnięto z książki Alagića i Arbiba „*Projektowanie programów poprawnych i dobrze zbudowanych*”. Liczba gwiazdek przy numerze zadania oznacza jego stopień trudności (im więcej gwiazdek tym zadanie ciekawsze i trzeba poświęcić mu więcej czasu).

### Zadanie 1

Pokaż, że jeśli zbiór  $X$  ma  $n$  elementów, to zbiór potęgowy<sup>1</sup>  $P(X)$  ma dokładnie  $2^n$  elementów.

### Zadanie 2

Pokaż, że jest dokładnie  $n! = \prod_{i=1}^n i$  permutacji zbioru  $n$ -elementowego.

### Zadanie 3

Napisz w C rekurencyjną funkcję `int a(int n)` obliczającą  $n$ -ty wyraz ciągu zadanego wzorem:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 2 \cdot n - 1 + a_{n-1} & \text{dla } n > 0 \end{cases}$$

Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego  $n$ , zachodzi  $a(n) = n^2$ .

### Zadanie 4

Dana jest funkcja rekurencyjna:

```
int f(int n)
{
    if (n == 0)
        return 0;
    else
        return n + f(n - 1);
}
```

---

<sup>1</sup>Zbiór potęgowy zbioru  $X$ , to zbiór wszystkich podzbiorów zbioru  $X$ .

Przekształć powyższą funkcję  $f(n)$  do postaci rekursji ogonowej.  
Zapisz funkcję  $f(n)$  w postaci iteracji (bez wywołania rekurencyjnego).

## Zadanie 5

Dana jest funkcja rekurencyjna obliczająca wartość symbolu Newtona  $\binom{m}{n}$ :

```
int f(int m, int n)
{
    if(n == 0 || m == n)
        return 1;
    else
        return (m * f(m - 1, n - 1)) / n;
}
```

Przekształć powyższą funkcję  $f(m, n)$  do postaci rekursji ogonowej.  
Zapisz funkcję  $f(m, n)$  w postaci iteracji (bez wywołania rekurencyjnego).

## Zadanie 6

Rozważmy dwie następujące deklaracje funkcji rekurencyjnych:

```
int f(int x)
{
    if(x == 0 || x == 1)
        return 1;
    else
        return f(x - 1) + f(x - 2);
}

int g(int x)
{
    if(x == 0 || x == 1)
        return 1;
    else
        return 2 * g(x - 2);
}
```

Wykazać, że:

$$(\forall x)(\forall y)((x \geq y) \rightarrow (f(x) \geq f(y) \geq 1))$$
$$(\forall x)(g(x) \leq f(x))$$

gdzie  $x$  i  $y$  są liczbami naturalnymi.

## Zadanie 7\*

Rozważmy dwie funkcje obliczające silnię:

```
int f(int x)
{
    if(x == 0)
```

```

    return 1;
  else
    return x * f(x - 1);
}

int g(int x, int y, int z)
{
  if(x == y)
    return z;
  else
    return g(x, y + 1, (y + 1) * z);
}

```

Wykazać, że:

$$(\forall x)(f(x) = g(x, 0, 1))$$

gdzie  $x$  jest liczbą naturalną.

## Zadanie 8\*\*

Rozważmy następującą deklarację funkcji rekurencyjnej:

```

int f(int x)
{
  if(x % 2 == 0)
    return x / 2;
  else
    return f(f(3 * x + 1));
}

```

Udowodnić, że każdy proces spowodowany przez wywołanie  $f(x)$ , dla naturalnego  $x$ , kończy się (tj. obliczenie wartości  $f(x)$  kończy się).