

Analiza Algorytmów 2022/2023

(zadania na laboratorium)

Wybór lidera - do 14 III 2023

Zadanie 1 – Przejrzyj [materiały do wykładu](#) i zaimplementuj symulator umożliwiający przetestowanie algorytmu wyboru lidera dla znanej liczby węzłów n (scenariusz drugi) oraz dla znanego ograniczenia górnego u na liczbę węzłów n (scenariusz trzeci). Możesz wykorzystać dowolny język programowania.

Zadanie 2 – Niech zmienna losowa L oznacza liczbę slotów od rozpoczęcia algorytmu do czasu wyboru lidera. Wykorzystaj symulator z poprzedniego zadania, aby narysować rozkład empiryczny (histogram) zmiennej losowej L dla obu rozważanych scenariuszy. Dla scenariusza ze znanym ograniczeniem u rozważ trzy przypadki: $n = 2$, $n = u/2$, $n = u$. Uzasadnij wyniki. (10p)

Zadanie 3 – Dla scenariusza ze znaną liczbą węzłów n wykorzystaj symulator do oszacowania wartości $\mathbb{E}[L]$ oraz $\mathbb{V}ar[L]$. Sprawdź, czy wyniki są zgodne z wynikami teoretycznymi. (10p)

Zadanie 4 – Rozważmy scenariusz ze znanym ograniczeniem u . Zgodnie z notacją wprowadzoną w materiałach do wykładu przez $S_{L,n}$ oznaczamy zdarzenie, że w jednej rundzie algorytmu długości $L = \lceil \log_2 u \rceil$ udało się wybrać lidera, jeśli w systemie jest n węzłów. Zaproponuj odpowiednie doświadczenie i za pomocą symulacji potwierdź poprawność Twierdzenia 1 z materiałów do wykładu: $Pr[S_{L,n}] \geq \lambda \approx 0.579$. (10p)

Analiza strumieni danych

MinCount - do 28 III 2023

Zadanie 5 – Przeczytaj notatki do wykładu dotyczące problemu przybliżonego zliczania. Następnie zaimplementuj algorytm $\text{MinCount}(k, h, \mathcal{M})$ i przetestuj jego działanie:

- Rozważ multizbiory $\mathcal{M}_n = (S_n, m)$ takie, że $|S_n| = n$ dla $n = 1, 2, \dots, 10^4$ oraz wszystkie zbiory S_n są rozłączne. Czy zmiana funkcji m ma wpływ na wartość estymacji \hat{n} uzyskiwanej w algorytmie?
- Dla $k = 2, 3, 10, 100, 400$ i multizbiorów z punktu a) narysuj wykres mający na osi poziomej wartości n a na osi pionowej stosunek \hat{n}/n .
- Eksperymentalnie dobierz wartość k tak by w 95% przypadków $|\frac{\hat{n}}{n} - 1| < 10\%$.

(10p)

Zadanie 6 – Dla kilku różnych funkcji haszujących $h : S \rightarrow \{0, 1\}^B$ i różnych wartości parametru B przetestuj działanie algorytmu $\text{MinCount}(k, h, \mathcal{M})$. Postaraj się znaleźć funkcję haszującą h dla której wyniki algorytmu są istotnie gorsze i wyjaśnij z czego może wynikać utrata dokładności. Co poza wartością parametru B może mieć znaczenie? (10p)

Zadanie 7 – Twoim zadaniem jest porównanie teoretycznych wyników dotyczących koncentracji estymatora \hat{n} wykorzystanego w algorytmie $\text{MinCount}(k, h, \mathcal{M})$ uzyskanych przez **a)** nierówność Czebyszewa oraz **b)** nierówność Chernoffa, z wynikami symulacji.

Dla $n = 1, 2, \dots, 10^4$, $k = 400$ i $\alpha = 5\%, 1\%, 0.5\%$ przedstaw na wykresie wartości \hat{n}/n (uzyskane w wyniku eksperymentów) oraz wartości $1 - \delta$ i $1 + \delta$ takie, że

$$Pr \left[1 - \delta < \frac{\hat{n}}{n} < 1 + \delta \right] > 1 - \alpha. \quad (10p)$$

HyperLogLog - do 18 IV 2023

Zadanie 8 – Zaimplementuj algorytm HyperLogLog z korektami i przetestuj jego działanie dla różnych wartości parametru m (liczba rejestrów) oraz różnych funkcji haszujących - stwórz wykresy analogiczne do tych z zadania 5. Porównaj dokładność estymacji algorytmów MinCount oraz HyperLogLog , gdy oba mają do dyspozycji taką samą ilość pamięci (możesz założyć, że potrzeba 5 bitów na rejestr w HyperLogLog oraz 32 bity na wartość hasza w MinCount). (10p)

Blockchain - do 9 V 2023

Zadanie 9 – Przeczytaj [notatki do wykładu](#). Niech $0 < q < 1/2$ oznacza prawdopodobieństwo wydobycia kolejnego bloku przez adversarza odpowiadające części mocy obliczeniowej będącej w jego posiadaniu. Niech n oznacza liczbę potwierdzeń (nadbudowanych bloków) potrzebnych by uznać transakcję za potwierdzoną. Niech $P(n, q)$ oznacza prawdopodobieństwo, że adversarz o mocy q będzie dysponował łańcuchem bloków równym lub dłuższym niż ten budowany przez uczciwych użytkowników w momencie, gdy nadbudowali oni blok zawierający rozważaną transakcję n blokami lub kiedykolwiek później.

- a) Porównaj formuły na $P(n, q)$ uzyskane przez Nakamoto i Grunspana. W szczególności:
 - ustal $n = 1, 3, 6, 12, 24, 48$ i przedstaw wykresy $P(n, q)$ w zależności od wartości q ,
 - ustal dopuszczalne prawd.sukcesu adversarza $P(n, q) = 0.1\%, 1\%, 10\%$ i narysuj wykresy przedstawiające jak należy dobrać wartość n w zależności od wartości q .
- b) Zaimplementuj symulator ataku „double spending”, który umożliwi eksperymentalne przybliżenie prawdopodobieństwa zdarzenia $P(n, q)$ w zależności od wartości n i q . Wskazówka: zaprojektuj eksperyment i powtórz go wielokrotnie ([Metoda Monte Carlo](#)). Starannie i dokładnie opisz ideę działania i kod symulatora.
- c) Porównaj wyniki symulatora do wyników analitycznych (wykresy). Jeśli pojawią się rozbieżności postaraj się je wyjaśnić.

(20p)

Samostabilizacja - do 23 V 2023

Zadanie 10 – Zaimplementuj symulator algorytmu [Mutual Exclusion](#) Dijkstry (strona 17). Dla ustalonego n oznaczającego liczbę procesów w pierścieniu, zweryfikuj, że startując z dowolnej konfiguracji początkowej algorytm przejdzie do legalnej konfiguracji. Jeśli z pewnej konfiguracji można przejść do kilku możliwych konfiguracji w zależności od tego, który proces wykona krok jako pierwszy, każde wykonanie powinno zostać zweryfikowane. Jaka jest największa liczba kroków do czasu osiągnięcia legalnej konfiguracji dla ustalonego n ? Dla jakich wartości n możesz uzyskać odpowiedź w sensownym czasie? Za zadanie możesz otrzymać $3 \times N$ punktów, gdzie N oznacza największą wartość n , dla której uda Ci się zweryfikować algorytm.

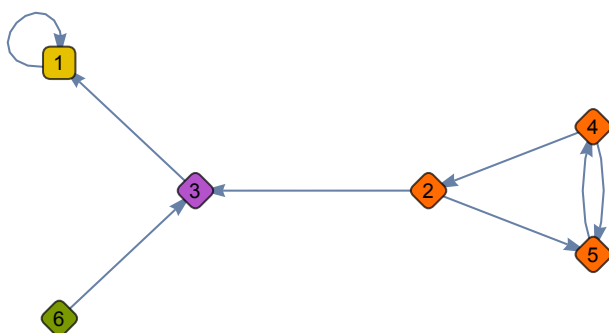
Zadanie 11 – Rozważmy graf $G = (V, E)$. Dwa wierzchołki $v, w \in V$ nazywamy niezależnymi, jeśli $\{v, w\} \notin E$. Podzbiór $S \subseteq V$ wierzchołków nazywamy niezależnym, jeśli wszystkie jego elementy są parami niezależne. Wzorując się na algorytmie Maximal Machting podanym na wykładzie zaprojektuj, zaimplementuj i przetestuj samo-stabilizujący algorytm znajdujący maksymalny zbiór niezależny (ang. [Maximal Independent Set](#)) w nieskierowanym grafie spójnym. Podaj przekonujące uzasadnienie poprawności algorytmu (formalny dowód - zadanie na ćwiczenia). Algorytmy znajdowania maksymalnego zbioru niezależnego mają wiele zastosowań, możesz np. myśleć o problemie przydziału częstotliwości w sieciach bezprzewodowych. (10p)

Łańcuchy Markowa - do 6 VI

Zadanie 12 – Dla danego grafu skierowanego G o n wierzchołkach definiujemy macierz Google

$$M_G = (1 - \alpha)P_G + \alpha \frac{1}{n}J_n, \quad (1)$$

gdzie P_G to stochastyczna macierz $n \times n$ opisująca prawdopodobieństwa przejścia* między wierzchołkami grafu G , J_n to macierz $n \times n$ złożona z samych jedynek, $\alpha \in [0, 1]$ to współczynnik tłumienia. Poniższy graf przedstawia schemat połączeń między sześcioma stronami internetowymi. Wyznacz rozkłady stacjonarne dla łańcucha Markowa związanego z macierzą M_G dla $\alpha = 0, 0.15, 0.5, 1$. Co się zmieni jeśli zlikwidujemy połączenie między stanem 2 i 3? Jaki jest cel wprowadzania macierzy $\alpha \frac{1}{n}J_n$? Dlaczego α nazywa się czasem współczynnikiem znudzenia? (10p)



Zadanie 13 – Rozważ łańcuch Markowa o zbiorze stanów $\{0, 1, 2, 3\}$ i macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/10 & 1/10 & 3/5 \\ 1/10 & 1/10 & 7/10 & 1/10 \\ 1/10 & 7/10 & 1/10 & 1/10 \\ 9/10 & 1/10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Znajdź rozkład stacjonarny $\vec{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ dla tego łańcucha Markowa.
- Znajdź prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie 3 po 32 krokach, jeśli zaczynamy w stanie 0.
- Znajdź prawdopodobieństwo znalezienia się w stanie 3 po 128 krokach, jeśli łańcuch zaczyna się w stanie wybranym losowo w sposób jednostajny ze wszystkich czterech stanów.
- Przypuśćmy, że zaczynamy w stanie 0. Jaka jest najmniejsza wartość liczby kroków t , dla której

$$\max_s |P_{0,s}^t - \pi_s| \leq \varepsilon$$

dla $\varepsilon = 1/10, 1/100, 1/1000$. Kiedy przydaje się możliwość tego rodzaju aproksymacji rozkładu stacjonarnego? (10p)

*Przyjmujemy, że dla danego wierzchołka prawdopodobieństwo przejścia do każdego z jego sąsiadów w grafie skierowanym jest takie samo. Dodatkowo zakładamy, że jeśli wierzchołek nie ma krawędzi wychodzących, to przechodzi do każdego wierzchołka w grafie z takim samym prawdopodobieństwem $1/n$.

Zadanie 14 – Przyjmijmy, że mamy łańcuch Markowa opisany macierzą M_G zdefiniowaną w formule (1), gdzie macierz sąsiedztwa skierowanego grafu G ma postać

$$N_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oraz, że $\vec{\pi}_0 = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$ jest rozkładem w chwili 0 na stanach łańcucha. Sprawdź jaki jest rozkład w kolejnych 25 krokach ($\vec{\pi}_i$ dla $i = 1, 2, \dots, 25$) dla $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.85, 1$. Jak wartość parametru α wpływa na czas zbiegania do rozkładu stacjonarnego? Czy wartość parametru α ma wpływ na kolejność stron w rankingu PageRank? Narysuj stosowne wykresy. (10p)

Funkcje tworzące - do 20 VI

Zadanie 15 – Układając odpowiednie równanie rekurencyjne i wykorzystując funkcje tworzące dla danego n wyznacz liczbę wywołań linii 6 w poniższym algorytmie. Zweryfikuj odpowiedź eksperymentalnie. (15p)

```
1: f(int n) {
2:   int s = 0;
3:   if ( n == 0 ) then return 1;
4:   else
5:     for int i = 0; i < n; i++ do
6:       s += f(i);
7:     end for
8:   return s;
9:   end if
10: }
```

Zadanie 16 – Algorytm otrzymuje na wejściu tablicę długości $n \geq 0$. Jeśli $n \geq 2$ dla każdego $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ algorytm z prawdopodobieństwem $1/2$ wywołuje się rekurencyjnie na pewnej losowej „podtablicy” długości k . Wykorzystując funkcje tworzące wyznacz średnią liczbę wywołań algorytmu dla danego n i przedstaw swoje wyliczenia. Zweryfikuj odpowiedź eksperymentalnie. (15p)