Matematyka dyskretna

Informatyka algorytmiczna, WIT PWr
semestr letni 2023/2024

Rozgrzewka

Niech $k, n \in \mathbb{N}$ oraz $x, y \in \mathbb{R}$. Przez $[n]$ oznaczamy zbiór $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, przez $P(A)$ oznaczamy zbiór potęgowy zbioru A.

- silnia dolna: $x^{\underline{k}} = x(x-1)\dots(x-k+1)$, $x^{\underline{0}} = 1$
- silnia górna: $x^{\overline{k}} = x(x+1)\dots(x+k-1)$, $x^{\overline{0}} = 1$
- symbol Newtona: $\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}$
- dwumian Newtona: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Zad. 1 — Na ile sposobów można ustawić 8 osób w szeregu? A na ile w kółku?

Zad. 2 — Na ile sposobów można na szachownicy ustawić 8 wież tak, aby żadne dwie się nie biły, jeśli wieże są nierozróżnialne? A na ile, jeśli są rozróżnialne?

Zad. 3 — Przyjmijy, że kod PIN może być dowolnym układem czterech cyfr. Ile jest PIN-ów, w których jakaś cyfra się powtarza?

Zad. 4 — Rozważmy wszystkie ciągi długości n o wyrazach P, I, K, A, C, H, U. Ile jest wszystkich takich ciągów? Ile takich, w których żadna litera nie występuje 2 razy pod rząd? Ile takich, że wśród każdych kolejnych 7 wyrazów występuje wszystkie siedem liter?

Zad. 5 — Znajdź liczbę dzielników liczby 6000.

Zad. 6 — Na płaszczyźnie jest 12 punktów. Ile trójkątów wyznaczają te punkty, jeśli żadne trzy nie są współliniowe? A ile, jeśli 5 punktów leży na jedenj prostej, a poza tym żadne trzy nie są współliniowe?

Zad. 7 — Na ile sposobów można przejść po kracie 5×8 poruszając się tylko w górę lub w prawo?

Zad. 8 — Wyznacz moc zbioru $\{k \in [1000] : 2|k \vee 5|k \vee 7|k\}$.

Zad. 9 — Ile razy wykonywana jest operacja OP wewnątrz poniższej pętli?

```
for i=1 to n do
  for j=i to n do
    OP(i,j)
```

Zad. 10 — Oblicz $n^{\underline{n}}$, $1^{\overline{n}}$, $(-1)^{\underline{k}}$, $\binom{-1}{k}$, $\binom{-1/2}{k}$.

Zad. 11 — Ile jest funkcji częściowych ze zbioru n elementowego w zbiór m elementowy? (Funkcja częściowa z X w Y to funkcja $f : X' \to Y$, gdzie $X' \subseteq X$.)

Zad. 12 — Wyznacz moc zbiorów $\{(A, B) \in P([n])^2 : A \subseteq B\}$ oraz $\{(A, B, C) \in P([n])^3 : A \subseteq B \subseteq C\}$.

Zad. 13 — Niech $X_i = [n] \times \{i\}$ dla $i \in [n]$. Wyznacz moc zbioru $S_n = \{A \in P([n] \times [n]) : (\forall\ i \in [n])(A \cap X_i \neq \emptyset)\}$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} |S_n|/2^{n^2}$.

Współczynniki dwumianowe

Zad. 1 — Znajdź wszystkie liczby naturalne a, b, c takie, że $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = 2\binom{a}{c}$.

Zad. 2 — Oblicz $\binom{101}{0} + \binom{101}{1} + \binom{101}{2} + \ldots + \binom{101}{50}$ oraz $\binom{101}{1} + \binom{101}{3} + \binom{101}{5} + \ldots + \binom{101}{101}$.

Zad. 3 — Ile jest podzbiorów mocy parzystej zbioru n-elementowego?

Zad. 4 — Pokaż, że iloczyn k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez $k!$.

Zad. 5 — Niech $j, k, n \in \mathbb{N}$. Przedstaw dowód kombinatoryczny oraz algebraiczny tożsamości

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}.$$

Zad. 6 — Uogólnij rozwiązanie zadania 7 z poprzedniej listy na kratę $k \times m$. Wykorzystaj to zadanie do udowodnienia tożsamości Pascala dla $k, n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Zad. 7 — Niech $n \in \mathbb{N}$. Policz na dwa sposoby, ile jest możliwości wyboru trzech rozdziałów z książki mającej ich $n+1$, aby udowodnić tożsamość

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Wyprowadź z niej wzór na sumę kwadratów. Uogólnij ją tak, by otrzymać wzór na $\binom{n+1}{m+1}$, gdzie $m \in \mathbb{N}$.

Zad. 8 — Znajdź zwartą postać sum $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$ oraz $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$.

Zad. 9 — Znajdź zwartą postać sumy $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2$.

Zad. 10 — Wyznacz $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2$.
Wskazówka: Skorzystaj z tego, że $(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$.

Zad. 11 — Zapisz za pomocą jednego symbolu Newtona $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Zad. 12 — Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą oraz $0 < k < p$.

1. Pokaż, że $p|\binom{p}{k}$.
2. Pokaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $a, b \in \mathbb{N}$, to $(a+b)^p \equiv (a^p + b^p)(\mod p)$.
3. Wyprowadź z poprzedniego podpunktu Małe Twierdzenie Fermata.

Zad. 13 — Ile rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych ma równanie $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$? A ile w zbiorze liczb całkowitych dodatnich?

Zad. 14 — Znajdź liczbę czwórek (a_1, a_2, a_3, a_4) liczb całkowitych nieujemnych, które spełniają warunek $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le n$.

Zad. 15 — Ile jest rozmieszczeń uporządkowanych k różnych elementów w n różnych pudełkach (pudełko może być puste, kolejność elementów w pudełku ma znaczenie)?

Zad. 16 — Ile jest funkcji rosnących $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$?

Wzór włączeń i wyłączeń / Zasada szufladkowa Dirichleta

- Wzór włączeń i wyłączeń. Dla zbiorów skończonych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ prawdą jest, że

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Zad. 1 — Policz, ile jest liczb pierwszych mniejszych od 100.

Zad. 2 — Niech $n \geq 1$. Funkcja Eulera $\varphi(n)$ liczy, ile jest liczb naturalnych w zbiorze $[n]$ względnie pierwszych z n. Pokaż, że jeśli n jest iloczynem trzech różnych liczb pierwszych $n = pqr$, to $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{q})(1 - \frac{1}{r})$.

Zad. 3 — Znajdź liczbę ciągów długości $2n$ takich, że każda liczba $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie dwa razy, przy czym żadne dwa kolejne wyrazy nie są równe.

Zad. 4 — Nieporządkiem n-elementowego zbioru nazywamy bijekcję $f : [n] \to [n]$ taką, że dla każdego $i \in [n]$ mamy $f(i) \neq i$. Wyznacz D_n - liczbę nieporządków n-elementowego zbioru. Następnie oblicz granicę $\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{n!}$.

Zad. 5 — Udowodnij, że na Facebooku muszą istnieć dwie osoby, które mają taką samą liczbę znajomych (zakładamy, że relacja znajomości jest symetryczna, oraz że na Facebooku jest zarejestrowana więcej niż jedna osoba).

Zad. 6 — Niech A będzie ustalonym dziesięcioelementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 50\}$. Udowodnij, że w zbiorze A istnieją dwa różne pięcioelementowe podzbiory takie, że sumy wszystkich elementów każdego z nich są równe.

Zad. 7 — Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą, niekoniecznie różnymi, liczbami całkowitymi. Pokaż, że suma pewnych spośród nich jest wielokrotnością liczby n.

Szacowanie sum, liczby harmoniczne, wzór Stirlinga

- n-ta liczba harmoniczna: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $H_n = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$, $\gamma \approx 0.5772$ - stała Eulera-Mascheroniego
- Funkcja dzeta Riemanna dla $r \in \mathbb{C}$ takich, że $Re(r) > 1$: $\zeta(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$.
- Wzór Stirlinga: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Zad. 1 — Wyznacz asymptotyczne tempo wzrostu funkcji $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Zad. 2 — Znajdź oszacowania górne i dolne $\zeta(r)$ dla $r \in (1, \infty)$. Skorzystaj z metody omówionej na wykładzie.

Zad. 3 — Pokaż, bez zastosowania indukcji matematycznej, że

1) $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1)$,
2) $\sum_{k=2}^{n} \frac{H_k}{k(k-1)} = 2 - \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n}$.

Zad. 4 — Przedstaw sumy

1) $\sum_{k=2n}^{3n} \frac{1}{k}$
2) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$
3) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

za pomocą liczb harmonicznych. Zbadaj ich asymptotykę.

Zad. 5 — Pokaż, że $H_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \binom{n}{k}$.
Wskazówka: Oblicz całkę $\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx$.

Zad. 6 — Oblicz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{10^n}$.
Wskazówka: Rozwinięcie funkcji $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ *w szereg Taylora w punkcie* 0 *to* $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. *Przemnóż ten szereg przez szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Zad. 7 — Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych $k \leq n$ mamy

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k .$$

Wskazówka: Przypomnij sobie, że $e^x = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!}$.

Zad. 8 — Zastosuj wzór Stirlinga do wyznaczenia przybliżeń liczb $\binom{2n}{n}$ oraz $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Zad. 9 — Pokaż, że $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}$. Z czym kojarzysz to wyrażenie?

Zad. 10 — Funkcję specjalną gamma definiuje się następująco

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Rozszerza ona pojęcie silni na liczby rzeczywiste, a nawet zespolone. Jeżeli część rzeczywista liczby x jest dodatnia, to całka ta jest zbieżna bezwzględnie.

1. Oblicz $\Gamma(1)$.
2. Całkując przez części pokaż, że $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyraź $n!$ za pomocą funkcji gamma.
4. Oblicz $\Gamma(1/2)$.

Liczby Stirlinga II rodzaju, liczby Bella

- Liczby Stirlinga II rodzaju (liczba podziałów zbioru mocy n na k niepustych podzbiorów). Dla $k, n > 0$
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}, \qquad \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0, \qquad \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1.$$
- Liczby Bella (liczba partycji zbioru mocy n): $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$. Dla $n \geq 0$
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \qquad B_0 = 1.$$

Zad. 1 — Niech $n \geq 3$. Udowodnij, że funkcji "na" $f : A \to B$, gdzie $|A| = n$, $|B| = 3$, jest $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$. Podaj wzór na $\left\{ {n \atop 3} \right\}$.

Zad. 2 — Niech $|X| = n$, $|Y| = k$. Przypomnij z wykładu wzór na liczbę surjekcji (funkcji "na") $f : X \xrightarrow{na} Y$. Wyraź liczbę surjekcji wykorzystując liczbę Stirlinga drugiego rodzaju. Podaj wzór na $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Zad. 3 — Ile jest liczb 13-cyfrowych takich, że każda cyfra występuje w nich choć raz?

Zad. 4 — Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że
$$\left\{ {n+m+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \cdot \left\{ {n+k \atop k} \right\}.$$

Zad. 5 — Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij, że
$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}.$$

Wykorzystaj tę tożsamość do uzasadnienia zależności rekurencyjnej dla liczb Bella.

Zad. 6 — Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Uzasadnij, że
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{\substack{r_i \geq 1 \\ r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n}} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} / k!.$$

Zad. 7 — Pokaż, że $B_n < n!$ dla $n > 2$.

Zad. 8 — Narysuj wykresy ciągów
$$\frac{(\ln B_n)/n}{\ln n - \ln \ln n} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\ln{(n+1)} B_n^{1/n}}{n}$$
dla $n = 2, 3, \ldots, 1000$. Spróbuj z analizy wykresów wyciągnąć jakieś wnioski na temat asymptotyki liczb Bella.

Permutacje

- Rząd permutacji $\sigma \in S_n$ to najmniejsza dodatnia liczba k taka, że $\sigma^k = id$.
- Wektor inwersji premutacji $\sigma \in S_n$ to $v = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, gdzie $v_i = |\{k \in [n] : k < i \wedge \sigma(k) > \sigma(i)\}|$ dla $i \in [n]$.

Zad. 1 — Niech $\sigma \in S_n$. Jak zmieni się σ po złożeniu z transpozycją $\tau = (i\ j)$ z prawej strony ($i \neq j$)? A jak po złożeniu z τ z lewej strony? Pokaż, że złożenie z transpozycją zmienia znak permutacji, tzn. $sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\tau \circ \sigma) = -sgn(\sigma)$. Następnie pokaż, że dla $\sigma, \pi \in S_n$ mamy $sgn(\sigma \circ \pi) = sgn(\sigma)sgn(\pi)$.

Zad. 2 — Udowodnij, że dowolną transpozycję $(i\ j)$ z S_n ($i \neq j$) da się przedstawić jako złożenie transpozycji elementów sąsiednich $(i\ i+1)$.

Zad. 3 — Niech $\sigma = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9}{2\ 3\ 9\ 1\ 5\ 4\ 8\ 7\ 6}$. Wyznacz rozkład σ na cykle. Znajdź znak σ, przedstaw ją jako złożenie transpozycji, przedstaw ją jako złożenie transpozycji elementów sąsiednich i wyznacz jej wektor inwersji.

Zad. 4 — Permutacja $\sigma \in S_n$ ma rozkład na k rozłącznych cykli mocy $c_1, \ldots, c_k$.
Wyznacz znak i rząd σ.

Zad. 5 — Inwolucją nazywamy permutację $\sigma \in S_n$ taką, że $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Znajdź liczbę inwolucji z S_n nie mających punktów stałych.

Zad. 6 — Jaka jest średnia liczba punktów stałych w permutacji z S_n?

Zad. 7 — Ustalmy liczbę $n > 1$.

1. Pokaż, że funkcja $sgn : S_n \to \{-1, 1\}$ jest epimorfizmem (homomorfizmem "na") grup $(S_n, \circ)$ oraz $(\{-1, 1\}, \cdot)$.
2. Wyznacz jądro odwzorowania sgn.
3. Wyznacz moc jądra odwzorowania sgn.

Zad. 8 — Czy absolutnie roztargniona sekretarka ma większą szansę na włożenie choćby jednego listu do właściwej koperty, gdy ma ona do wysłania 5 listów, czy wówczas, gdy ma do wysłania 6 listów?

Zad. 9 — Na ile sposobów można ustawić na szachownicy 8 jednakowych wież tak, aby żadne dwie się nie biły, a ponadto żadna z nich nie znajdowała się na przekątnej $A1 - B2 - \ldots - H8$?

Liczby Stirlinga I rodzaju

- Liczby Stirlinga I rodzaju, nieznakowane (liczba podziałów zbioru mocy n na k rozłącznych cykli). Dla $k, n > 0$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Zad. 1 — Pokaż, że $\left[{n+1 \atop 2}\right] = n!H_n$.

Zad. 2 — Pokaż, że dla $n \geq 3$ liczby Bella spełniają $B_n < n!$. (Dla $n \in \{0, 1, 2\}$ mamy $B_n = n!$.) Wykorzystaj liczby Stirlinga I rodzaju.

Zad. 3 — Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania z grupy S_n permutacji składającej się z jednego cyklu? A z dwóch? (Losujemy zgodnie z rozkładem jednostajnym.)

Zad. 4 — Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\begin{bmatrix} n+m+1 \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \cdot \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}.$$

Zad. 5 — Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Uzasadnij, że

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (n-k)!.$$

Zad. 6 — Rozważmy przestrzeń liniową wielomianów stopnia co najwyżej n nad liczbami rzeczywistymi. Wiemy, że $\mathcal{E} = \{x^i : i = 0, \ldots, n\}$ oraz $\mathcal{F} = \{x^{\underline{i}} : i = 0, \ldots, n\}$ są bazami tej przestrzeni. Na wykładzie pokazaliśmy, że znakowane liczby Stirlinga I rodzaju $s(n, k) = (-1)^{n+k}\left[{n \atop k}\right]$ są współczynnikami przejścia z bazy $\mathcal{E}$ do bazy $\mathcal{F}$. Rozważmy jeszcze jedną bazę $\mathcal{G} = \{x^{\overline{i}} : i = 0, \ldots, n\}$. Pokaż, że nieznakowane liczby Stirlinga I rodzaju $\left[{n \atop k}\right]$ są współczynnikami przejścia z bazy $\mathcal{E}$ do bazy $\mathcal{G}$.