

Topologia

Lista zadań

Jacek Cichoń, WIT, PWr, 2024/25

1 Wstęp

Zadanie 1 — (Przestrzeń Baire’a) Pokaż, że para $\mathcal{N} = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ z metryką określoną wzorem

$$d(f, g) = \begin{cases} 0 & : f = g \\ \frac{1}{1 + \min\{k : f(k) \neq g(k)\}} & : f \neq g \end{cases}$$

jest przestrzenią metryczną. Wyznacz kulę $B(f, 1/5)$ w tej przestrzeni.

Zadanie 2 — Niech A i B będą podzbiorami przestrzeni metrycznej (X, d) takimi, że $A \cap B \neq \emptyset$. Pokaż, że

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B),$$

gdzie $\delta(C) = \sup\{d(x, y) : x, y \in C\}$.

Zadanie 3 — Pokaż, że dla dowolnych podzbiorów przestrzeni topologicznej mamy

1. $\text{cl}(A \cap B) \subseteq \text{cl}(A) \cap \text{cl}(B)$
2. $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$.

Podaj przykłady w których inkluzje te są właściwe.

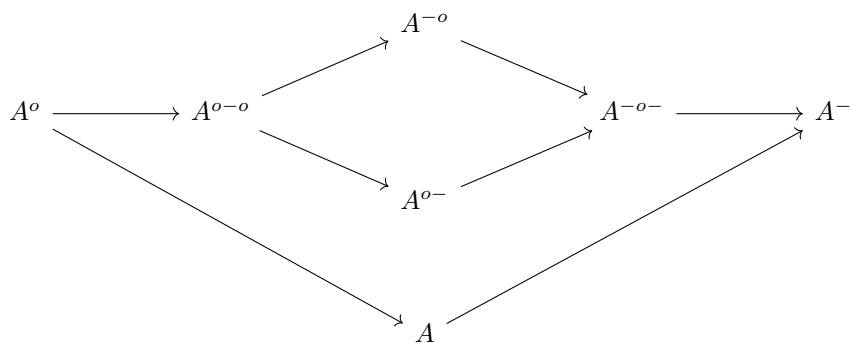
Zadanie 4 — Rozważamy liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ ze standardową topologią. Niech

$$A = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$$

Wyznacz wszystkie zbiory które możesz ze zbioru A za pomocą operacji domknięcia oraz dopełnienia.

Zadanie 5 — (Twierdzenie Kuratowskiego) Niech $(X, \mathcal{O})$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Dla $A \subseteq X$ oznaczamy: $A^o = \text{int}(A)$, $A^- = \text{cl}(A)$, $A^c = X \setminus A$.

1. Zapisz podstawowe własności operacji $\text{int}()$ oraz $\text{cl}()$ używając powyższej notacji.
2. Pokaż, że zachodzą następujące zależności (strzałki oznaczają inkluzję)



3. Pokaż, że $A^{-o-o-} = A^{-o}$ oraz $A^{o-o-} = A^{o-}$.
4. Niech σ będzie dowolnym, skończonym ciągiem operacji ze zbioru $\{-, o, c\}$. Pokaż, że istnieje skończony ciąg operacji τ ze zbioru $\{-, o\}$ taki, że $A^\sigma = A^\tau$ lub $A^\sigma = (A^c)^\tau$.

5. Korzystając z poprzednich punktów udowodnij twierdzenie Kuratowskiego o 14 zbiorach.

Zadanie 6 — Zbiór A nazywamy zbiorem *regularnym otwartym* jeśli $A^{-o} = A$.

1. Podaj przykłady zbiorów otwartych, które nie są regularnymi otwartymi.
2. Pokaż, że dla dowolnego zbioru A zbiór A^{-o} jest regularnym otwartym.
3. Pokaż, że jeśli U, V są zbiorami regularnymi otwartymi, to $U \cap V$ jest regularny otwarty.

UWAGA: Przyjmujemy następującą definicję brzegu zbioru A : $\partial(A) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(A^c)$ (w literaturze znaleźć można inne, ale równoważne, definicje).

Zadanie 7 — Niech A będzie dowolnym podzbiorem ustalonej przestrzeni topologicznej X .

1. Pokaż, że zbiory $\text{int}(A), \partial(A), \text{int}(A^c)$ są parami rozłączne oraz, że ich suma jest równa X .
2. Pokaż, że $\text{int}(A) = A \setminus \partial(A)$.
3. Pokaż, że $\text{cl}(A) = A \cup \partial(A)$.
4. Pokaż, że $\partial(A) = \text{cl}(A) \setminus \text{int}(A)$.
5. Pokaż, że $\partial(\partial(A)) \subseteq \partial(A)$.

Zadanie 8 — Niech $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Rozważamy przestrzeń metryczną (X, d) , gdzie d jest obcięciem metryki euklidesowej w $\mathbb{R}^2$ do zbioru X (czyli $d = d_{\text{eucl}} \upharpoonright_{X \times X}$). Niech $B = B((0, 0), 1)$. Wyznacz $\text{int}(B)$, $\text{cl}(B)$ oraz $\partial(B)$.

Zadanie 9 — Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $p \in X$. Pokaż, że dla dowolnego $r > 0$ mamy

$$\partial(\{x \in X : d(x, p) < r\}) \subseteq \{x \in X : d(x, p) = r\}.$$

Zadanie 10 — Rozważamy kostkę Hilberta $H = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ z metryką $d(x, y) = \sum_n \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n}$.

1. Niech $A = (0, 1)^{\mathbb{N}}$. Oblicz $\text{int}(A)$, $\text{cl}(A)$ oraz $\partial(A)$.
2. Niech $D = \{x \in H : (\forall n \in \mathbb{N})(x(n) \in \mathbb{Q}) \wedge (\exists n)(\forall k > n)(x(k) = 0)\}$. Wyznacz moc zbioru D oraz oblicz $\text{cl}(D)$.

Zadanie 11 — Pracujemy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową. Niech $B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{k}) : n, k \in \mathbb{N}^+\}$.

1. Wyznacz zbiór $C = \text{cl}(B)$.
2. Wyznacz zbiory $C^d, (C^d)^d$ oraz $((C^d)^d)^d$.

Zadanie 12 — Wyznacz operacje wnętrza i domknięcia w następujących przestrzeniach topologicznych:

1. $(A, \{\emptyset, A\})$
2. $(A, P(A))$
3. $S = (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\})$ (przestrzeń Sierpińskiego)

Zadanie 13 — Ustalamy zbiór X oraz rozbiecie $\mathcal{P}$ zbioru X . Definiujemy $\mathcal{O}_{\mathcal{P}} = \{\bigcup S : S \subseteq \mathcal{P}\}$.

1. Pokaż, że $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{P}})$ jest to przestrzeń topologiczna.
2. Wyznacz operacje wnętrza i domknięcia w tej przestrzeni.
3. Ile różnych zbiorów możesz wyznaczyć za pomocą operacji domknięcia i dopełnienia z ustalonego zbioru $A \subseteq X$?

Zadanie 14 — (**Topologia co-skończona**) Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Niech $\mathcal{O} = \{A^c : A \subseteq X \wedge |A| < \aleph_0\}$.

1. Pokaż, że $(X, \mathcal{O})$ jest przestrzenią topologiczną.
2. Pokaż, że topologia $\mathcal{O}$ nie jest generowana przez żadną metrykę na zbiorze X .
3. Wyznacz operacje wnętrza i domknięcia w tej topologii.

Zadanie 15 — Pokaż, że przestrzenie l_2 , kostka Hilberta oraz przestrzeń Baire'a są ośrodkowe.

Zadanie 16 — Rozważamy przestrzeń metryczną jeż $J_X = \{0\} \cup (X \times (0, 1])$ indeksowaną zbiorem X . Dla jakich zbiorów X przestrzeń J_X jest ośrodkowa?

Zadanie 17 — Niech d będzie metryką na zbiorze X . Określamy funkcję

$$\tilde{d}(x, y) = \min(d(x, y), 1) .$$

1. pokaż, że $\tilde{d}$ jest metryką na X
2. Pokaż, że metryki d i $\tilde{d}$ są równoważne.

* **Zadanie 18** — Pokaż, że waga linii Sorgenfrey'a jest równa continuum.

Wskazówka: Załóż, że $\mathcal{B}$ jest bazą linii Sorgenfrey'a mocy mniejszej od continuum. Niech $L = \{\inf(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Zauważ, że $|L| < \mathfrak{c}$. Weź $a \in \mathbb{R} \setminus L$. Pokaż, że zbioru $[a, a + 1)$ nie możesz przedstawić jako sumy podrodziny $\mathcal{B}$.

Zadanie 19 — Pokaż, że ośrodkowe przestrzenie metryczne spełniają II aksjomat przeliczalności.

2 Funkcje ciągłe

Zadanie 20 — Niech $|X| \geq 2$. Niech $\mathcal{X} = (X, \{\emptyset, X\})$.

1. Niech $\mathcal{Y}$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Opisz wszystkie ciągłe z $\mathcal{Y}$ do $\mathcal{X}$.
2. Opisz wszystkie funkcje ciągłe z przestrzeni $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ w zbiór $\mathbb{R}$.

Zadanie 21 — Opisz wszystkie funkcje ciągłe z przestrzeni $\mathbb{R} \times (X, P(X))$ w zbiór $\mathbb{R}$.

Zadanie 22 — Niech $X = (0, 1) \cup (2, 3)$ oraz $|Z| \geq 2$. Opisz funkcje ciągłe z X w przestrzeń topologiczną $(Z, P(Z))$.

Zadanie 23 — Niech $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1\}$. Zbiór X traktujemy jako przestrzeń metryczną z metryką odziedziczoną z naturalnej metryki z $\mathbb{R}$.

1. Opisz funkcje ciągłe z X w $\mathbb{R}$.
2. Opisz funkcje ciągłe z $X \times X$ w $\mathbb{R}$.

Zadanie 24 — Niech $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ będą przestrzeniami topologicznymi. Niech $f = (f_1, f_2) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$. Pokaż, że f jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy obie funkcje f_1 i f_2 są ciągłe.

Zadanie 25 — Niech $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$ będą przestrzeniami topologicznymi. Niech $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{W}$ będzie ciągła.

1. Niech $a \in X$ oraz $g(y) = f(a, y)$. Pokaż, że g jest ciągła.
2. Przypomnij sobie przykład (z Analizy Matematycznej II) funkcji $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ która nie jest ciągła ale dla każdego $a \in \mathbb{R}$ obie funkcje $\lambda y \rightarrow f(a, y)$ oraz $\lambda x \rightarrow f(x, a)$ są ciągłe.

Zadanie 26 — Niech (X, d_1) i (Y, d_2) są przestrzeniami metrycznymi. Niech $a \in X$ oraz niech $f : X \rightarrow Y$. Pokaż, że funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall A \subseteq X)(a \in \overline{A} \rightarrow f(a) \in \overline{f(A)}) .$$

Zadanie 27 — Niech $T_1 = (X, \mathcal{O}_X)$ i $T_2 = (Y, \mathcal{O}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Załóżmy, że T_2 jest przestrzenią Hausdorffa. Załóżmy, że $A \subseteq X$ jest gęstym podzbiorem X . Niech $f, g : T_1 \rightarrow T_2$ będą ciągłe. Pokaż, że jeśli $f \upharpoonright A = g \upharpoonright A$ to $f = g$.

Zadanie 28 — Pokaż, że przestrzeń topologiczna $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O})$ jest przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy przekątna $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ jest domkniętym podzbiorem $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Zadanie 29 — Niech $A \subseteq X$ oraz $B \subseteq Y$.

1. Pokaż, że jeśli A jest domknięty w X oraz B jest domknięty w Y , to $A \times B$ jest domknięty w przestrzeni produktowej $X \times Y$.
2. Pokaż, że $\text{int}(A \times B) = \text{int}(A) \times \text{int}(B)$.

Zadanie 30 — Punkt $p \in X$ nazywamy punktem izolowanym jeśli $\{p\}$ jest zbiorem otwartym. Jeśli p nie jest punktem izolowanym, to p nazywamy *punktem skupienia* przestrzeni X . Przestrzeń X nazywamy *w sobie gęstą* jeśli nie ma punktów izolowanych.

1. Pokaż, że p jest punktem skupienia wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in \text{cl}(X \setminus \{p\})$.
2. Pokaż, że produkt $X \times Y$ jest w sobie gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z nich jest w sobie gęsta.

Zadanie 31 — Załóżmy, że U jest otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}$. Pokaż, że istnieje rodzina odcinków otwartych $\mathcal{S}$ taka, że $U = \bigcup \mathcal{S}$, $|\mathcal{S}| \leq \aleph_0$ oraz jeśli $I, J \in \mathcal{S}$ i $I \neq J$ to $I \cap J = \emptyset$.

3 Zupełność

Zadanie 32 — Niech X będzie przestrzenią zupełną oraz niech $A \subseteq X$. Pokaż, że A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy A jest podprzestrzenią zupełną.

Zadanie 33 — Zbiór A nazywamy zbiorem typu G_δ jeśli istnieje taka rodzina $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiorów otwartych, że $A = \bigcap_n U_n$. Zbiór A nazywamy zbiorem typu F_σ jeśli istnieje taka rodzina $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiorów domkniętych, że $A = \bigcup_n F_n$.

1. Pokaż, że w przestrzeniach metrycznych X mamy $\text{CLO}(X) \subseteq G_\delta(X)$ oraz $\text{OPEN}(X) \subseteq F_\sigma(X)$.
2. Pokaż, że $\mathbb{Q} \in F_\sigma(\mathbb{R}) \setminus G_\delta(\mathbb{R})$
3. Pokaż, że $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in G_\delta(\mathbb{R}) \setminus F_\sigma(\mathbb{R})$
4. Podaj przykład zbioru z $F_\sigma(\mathbb{R}) \cap G_\delta(\mathbb{R})$, który nie ani otwarty ani domknięty.

Zadanie 34 — Na zbiorze $\mathbb{R}$ rozważamy metrykę $d(x, y) = |\text{tgh}(x) - \text{tgh}(y)|$ (tgh oznacza funkcję tangens hiperboliczny).

1. Pokaż, że ciąg $a_n = n$ jest ciągiem Cauchy'ego w tej przestrzeni.
2. Wyznacz uzupełnienie tej przestrzeni.

Zadanie 35 — Niech (X, d) i (Y, ρ) będą przestrzeniami metrycznymi. Dla funkcji $f : X \rightarrow Y$ oraz $x \in X$ określamy

$$\omega(f, x) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \text{diam}_\rho f(B_d(x, \delta)) .$$

1. Pokaż, że funkcja f jest ciągła w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega(f, x) = 0$.
2. Pokaż, że dla dowolnej funkcji $f : X \rightarrow Y$ funkcja $(x \mapsto \omega(f, x))$ jest ciągła.
3. Niech $cg(f) = \{x \in X : f \text{ jest ciągła w } x\}$. Pokaż, że dla dowolnej funkcji $f : X \rightarrow Y$ zbiór $cg(f)$ jest typu G_δ .
4. Pokaż, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $cg(f) = \mathbb{Q}$.
5. Wskaż funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $cg(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Zadanie 36 — Niech U będzie otwartym podzbiorem przestrzeni zupełnej (X, d) . Niech

$$C = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : d(x, U^c) \cdot y = 1\} .$$

1. Pokaż, że C jest domkniętym podzbiorem $X \times \mathbb{R}$.
2. Dla $x \in U$ określamy $f(x) = (x, d(x, U^c))$. Pokaż, że $f : U \rightarrow C$ jest homeomorfizmem.

3. Niech ρ będzie jakąś metryką na $X \times \mathbb{R}$ zgodną z topologią produktową (np. $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|$). Na U określamy metrykę

$$\rho^*(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)) .$$

Pokaż, że metryka ρ^* jest zgodna z metryką d obciętą do $U \times U$, oraz, że (U, ρ^*) jest przestrzenią zupełną.

Zadanie 37 — Pokaż, że przestrzeń $C([0, 1])$ jest przestrzenią polską.

Zadanie 38 — Niech

$$M = \{f \in C([0, 1]) : (\exists a, b)(0 \leq a < b \leq 1 \wedge f \upharpoonright (a, b) \text{ jest monotoniczna})\}$$

Pokaż, że M jest zbiorem pierwszej kategorii w $C([0, 1])$.

* **Zadanie 39** — Niech $X = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times [-1, 1])$. Na zbiorze X rozważamy następującą odległość:

$$d(P, Q) = \inf\{dl(L) : L \text{ jest dowolną łamaną łączącą } P \text{ z } Q\} ,$$

gdzie $dl(L)$ oznacza długość łamanej L .

1. Wyznacz $d((-\frac{1}{n}, 0), (\frac{1}{n}, 0))$ oraz oblicz $\lim_n d((-\frac{1}{n}, 0), (\frac{1}{n}, 0))$.
2. Pokaż, że (X, d) nie jest zupełna.
3. Wyznacz uzupełnienie przestrzeni (X, d) .

** **Zadanie 40** — Załóżmy, że $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ , czyli, że jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną. Załóżmy, że

$$(\forall x \in [0, 1])(\exists n \in \mathbb{N})(f^{(n)}(x) = 0) ,$$

gdzie $f^{(n)}(x)$ oznacza n -tą pochodną funkcji f w punkcie x . Pokaż, że f jest wielomianem.

4 Spójność

Zadanie 41 — Niech $\text{CLOPEN}(X)$ oznacza rodzinę tych podzbiorów przestrzeni X które są jednocześnie otwarte i domknięte.

1. Pokaż, że X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{CLOPEN}(X) = \{\emptyset, X\}$.
2. Pokaż, że rodzina $\text{CLOPEN}(X)$ jest algebrą Boole'a ze względu na $\cap$, $\cup$ oraz operację dopełnienia.
3. Niech $X = [0, 1] \cup (2, 3)$. Wyznacz $\text{CLOPEN}(X)$.

Zadanie 42 — Niech A, B będą otwarte. Pokaż, że zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$ są rozgraniczone. Pokaż, to samo dla par zbiorów domkniętych.

Zadanie 43 — Załóżmy, że X jest spójną przestrzenią metryczną taką, że $|X| \geq 2$. Pokaż, że $|X| \geq \mathfrak{c}$.

Zadanie 44 — Niech $n \geq 2$ oraz niech $C \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem przeliczalnym. Pokaż, że zbiór $\mathbb{R}^n \setminus C$ jest spójny.

Zadanie 45 — Składową spójną elementu p nazywamy sumę wszystkich zbiorów do których należy punkt p .

1. Pokaż, że każda składowa spójna jest zbiorem spójnym.
2. Pokaż, że każda składowa spójna jest zbiorem domkniętym.
3. Pokaż, że różne składowe spójne są rozgraniczone.

Zadanie 46 — Niech $I_0 = \{0\} \times [0, 1]$ oraz $I_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ dla $n > 0$. Niech $A = \bigcup_{n \geq 0} I_n$.

1. Wyznacz składowe spójne przestrzeni A .

2. Pokaż, że I_0 nie jest otwarty w przestrzeni A .

C.D.N.

Powodzenia,
Jacek Cichoń