

Wstęp do Topologii i Teorii Miary

Lista zadań

Jacek Cichoń, WIT, PWr, 2025/26

1 Przestrzenie metryczne

Zadanie 1 — Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ rozważmy metryki

$$1. d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$2. d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$3. d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$4. d_J((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & : x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \\ d_2((x_1, y_1), (0, 0)) + d_2((0, 0), (x_2, y_2)) & : x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \end{cases}$$

Narysuj $B((1, 1), r)$ dla $r = 0.5, 1.0, \sqrt{2}, 1.5, 2$ dla każdej z tych metryk.

Zadanie 2 — Niech $C([0, 1], \mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych z odcinka $[0, 1]$ w liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$. Rozważamy funkcję $d : C([0, 1], \mathbb{R}) \times C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

1. Pokaż, że d jest metryką.
2. Spróbuj opisać kule w przestrzeni metrycznej $(C([0, 1], \mathbb{R}), d)$.

Zadanie 3 — Rozważamy ponownie zbiór $C([0, 1], \mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych z odcinka $[0, 1]$ w liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$. Rozważamy funkcję $\rho : C([0, 1], \mathbb{R}) \times C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Pokaż, że ρ jest metryką.

Zadanie 4 — Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz $a, b \in X$.

1. Kiedy $B(a, r_1) \cap B(b, r_2) = \emptyset$?
2. Kiedy $B(a, r_1) \subseteq B(b, r_2)$?

Zadanie 5 — Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz $a, b \in X$ i $a \neq b$. Pokaż, że istnieją zbiory otwarte U i V takie, że $a \in U$, $b \in V$ oraz $U \cap V = \emptyset$.

Zadanie 6 — Załóżmy, że d jest metryką na zbiorze X . Niech $\rho(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$. Pokaż, że ρ jest również metryką na zbiorze X .

Zadanie 7 — Niech X będzie zbiorem nieskończonym oraz niech $\mathcal{F} = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X : |X \setminus O| < \aleph_0\}$. Pokaż, że $(X, \mathcal{F})$ jest przestrzenią topologiczną.

Zadanie 8 — Niech $|X| \geq 2$. Pokaż, że przestrzeń topologiczna $(X, \{\emptyset, X\})$ nie jest metryzowalna.

Zadanie 9 — Niech X będzie dowolnym zbiorem. Pokaż, że przestrzeń topologiczna $(X, P(X))$ jest metryzowalna.

Zadanie 10 — (Przestrzeń Baire’a) Pokaż, że para $\mathcal{N} = (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ z metryką określoną wzorem

$$d(f, g) = \begin{cases} 0 & : f = g \\ \frac{1}{1 + \min\{k : f(k) \neq g(k)\}} & : f \neq g \end{cases}$$

jest przestrzenią metryczną. Wyznacz kulę $B(f, 1/5)$ w tej przestrzeni. **Wskazówka:** Udowodnij silniejszą własność od nierówności trójkąta: $d(f, g) \leq \max\{d(f, h), d(h, g)\}$. Aby to zrobić zdefiniuj liczby $\alpha_{x,y} = \min\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\}$ dla $x, y \in \mathcal{N}$ i przetrzy się liczbą $\alpha_{f,g}$,

Zadanie 11 — Niech A i B będą podzbiórmi przestrzeni metrycznej (X, d) takimi, że $A \cap B \neq \emptyset$. Pokaż, że

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) ,$$

gdzie $\delta(C) = \sup\{d(x, y) : x, y \in C\}$ (średnica zbioru C).

1.1 Operacje wnętrza i domknięcia

Zadanie 12 — Rozważamy liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ ze standardową topologią. Niech

$$A = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q})$$

Wyznacz wszystkie zbiory które możesz ze zbioru A za pomocą operacji domknięcia oraz dopełnienia.

Zadanie 13 — Dla $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz $d \in \mathbb{R}$ określamy $A + d = \{x + d : x \in A\}$.

1. Pokaż, że $\text{cl}(A + d) = \text{cl}(A) + d$.
2. Znajdź nieskończoną rodzinę $\mathcal{S}$ parami rozłącznych i gęstych podzbiorów $\mathbb{R}$.

Zadanie 14 — Pokaż, że dla dowolnych podzbiorów przestrzeni topologicznej mamy

1. $\text{cl}(A \cap B) \subseteq \text{cl}(A) \cap \text{cl}(B)$
2. $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$.

Podaj przykłady w których inkluzje te są właściwe.

Zadanie 15 — Wyznacz operacje wnętrza i domknięcia w następujących przestrzeniach topologicznych:

1. $(A, \{\emptyset, A\})$ (przestrzeń antydyskretna)
2. $(A, P(A))$ (przestrzeń dyskretna)
3. $S = (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\})$ (przestrzeń Sierpińskiego)

Zadanie 16 — (Generowanie topologii przez operację domknięcia) Załóżmy, że $c : P(X) \rightarrow P(X)$ jest operacją taką, że $c(\emptyset) = \emptyset$, $A \subseteq c(A) = c(c(A))$, $A \subseteq B \rightarrow c(A) \subseteq c(B)$ oraz $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$ dla dowolnych $A, B \in P(X)$. Niech $\mathcal{C}_c = \{A \in P(X) : c(A) = A\}$ oraz $\mathcal{O}_c = \{U \in P(X) : X \setminus U \in \mathcal{C}_c\}$. Pokaż, że $(X, \mathcal{O}_c)$ jest przestrzenią topologiczną.

Zadanie 17 — Niech $X \neq \emptyset$. Dla $A \subseteq X \times X$ określamy

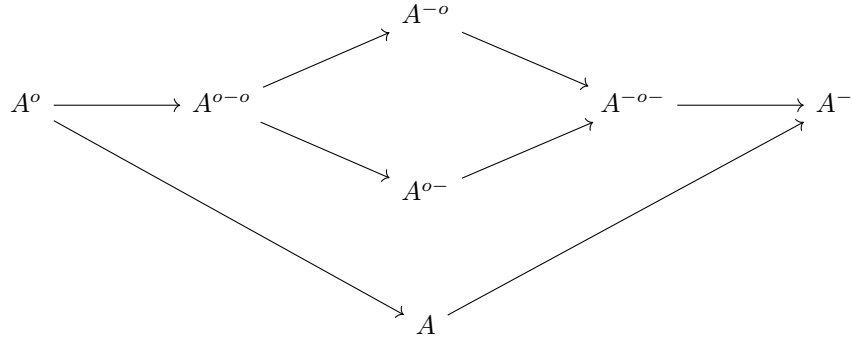
$$\text{cl}(A) = \{(x, y) \in X \times X : (\exists t)((x, t) \in A)\} .$$

1. Sprawdź, że cl spełnia wymienione w poprzednim zadaniu własności operacji c
2. Wyznacz zbiory domknięte i zbiory otwarte w topologii generowanej przez tę operację.

Zadanie 18 — (Twierdzenie Kuratowskiego) Niech $(X, \mathcal{O})$ będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Dla $A \subseteq X$ oznaczamy: $A^o = \text{int}(A)$, $A^- = \text{cl}(A)$, $A^c = X \setminus A$.

1. Zapisz podstawowe własności operacji $\text{int}()$ oraz $\text{cl}()$ używając powyższej notacji.

2. Pokaż, że zachodzą następujące zależności (strzałki oznaczają inkluzję)



3. Pokaż, że $A^{-o-o-} = A^{-o}$ oraz $A^{o-o-} = A^{o-}$.
 4. Niech σ będzie dowolnym, skończonym ciągiem operacji ze zbioru $\{-, o, c\}$. Pokaż, że istnieje skończony ciąg operacji τ ze zbioru $\{-, o\}$ taki, że $A^\sigma = A^\tau$ lub $A^\sigma = (A^c)^\tau$.
 5. Korzystając z poprzednich punktów udowodnij twierdzenie Kuratowskiego o 14 zbiorach.

Zadanie 19 — Ile różnych zbiorów możesz wyznaczyć za pomocą operacji domknięcia i dopełnienia z ustalonego zbioru $A \subseteq X$ w przestrzeni topologicznej z Zadania 17 ?

Zadanie 20 — Pracujemy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową. Niech $B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{k}) : n, k \in \mathbb{N}^+\}$.

1. Wyznacz zbiór $C = \text{cl}(B)$.
2. Element $x \in X$ jest punktem skupienia zbioru A jeśli dla każdego zbioru otwartego U takiego, że $x \in U$ mamy $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A oznaczamy przez A^d . Wyznacz zbiory C^d , $(C^d)^d$ oraz $((C^d)^d)^d$.

UWAGA: Przyjmujemy następującą definicję brzegu zbioru A : $\partial(A) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(A^c)$ (w literaturze znaleźć można inne, ale równoważne, definicje).

Zadanie 21 — Niech A będzie dowolnym podzbiorem ustalonej przestrzeni topologicznej X .

1. Pokaż, że zbiory $\text{int}(A)$, $\partial(A)$, $\text{int}(A^c)$ są parami rozłączne oraz, że ich suma jest równa X .
2. Pokaż, że $\text{int}(A) = A \setminus \partial(A)$.
3. Pokaż, że $\text{cl}(A) = A \cup \partial(A)$.
4. Pokaż, że $\partial(A) = \text{cl}(A) \setminus \text{int}(A)$.
5. Pokaż, że $\partial(\partial(A)) \subseteq \partial(A)$.

Zadanie 22 — Niech $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Rozważamy przestrzeń metryczną (X, d) , gdzie d jest obcięciem metryki euklidesowej w $\mathbb{R}^2$ do zbioru X (czyli $d = d_{\text{eucl}} \upharpoonright_{X \times X}$). Niech $B = B((0, 0), 1)$. Wyznacz $\text{int}(B)$, $\text{cl}(B)$ oraz $\partial(B)$.

Zadanie 23 — Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $p \in X$. Pokaż, że dla dowolnego $r > 0$ mamy

$$\partial(\{x \in X : d(x, p) < r\}) \subseteq \{x \in X : d(x, p) = r\}.$$

C.D.N.

Powodzenia,
Jacek Cichoń