

Lista zadań do wykładu z Fizyki

Jacek Cichoń

PWr ★ WIT ★ 2026



1 Rozgrzewka: kinematyka

Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ określamy $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ oraz $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Ponadto, $x \perp y$ jest skrótem własności $\langle x, y \rangle = 0$.

1. Prawo równoległoboku

Niech $u, v \in \mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Zadanie 2

Niech $a, b, \omega > 0$ będą ustalonymi stałymi oraz niech $\phi(t) = (a \cos(\omega t), b \sin(\omega t))$ dla $t \in \mathbb{R}$.

- Po jakiej krzywej porusza się punkt ϕ . Jaki jest okres tego ruchu?
- Oblicz $\dot{\phi}$, $\|\dot{\phi}\|$, $\ddot{\phi}$, $\|\ddot{\phi}\|$.
- Jaki jest związek między $\phi(t)$ oraz $\dot{\phi}(t)$?
- Kiedy $\dot{\phi}(t) \perp \phi(t)$?

Zadanie 3

Niech $r, s, \omega > 0$ będą ustalonymi stałymi oraz niech $\phi(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), st)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Oblicz $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$, $\|\dot{\phi}\|$, $\|\ddot{\phi}\|$ oraz długość krzywej $\{\phi(t) : t \in [0, 2\pi/\omega]\}$.

Zadanie 4

Oto definicje dwóch podstawowych funkcji hiperbolicznych:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- Pokaż, że $\sinh'(x) = \cosh(x)$ oraz $\cosh'(x) = \sinh(x)$
- Pokaż, że $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, $\sinh(2t) = 2 \sinh(t) \cosh(t)$, $\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t)$ oraz $\cosh(t) + \sinh(t) = e^t$. Porównaj te własności z własnościami funkcji trygonometrycznych.
- Niech $\psi(t) = (t, \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}))$ dla $t \in \mathbb{R}$. Oblicz $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, $\|\dot{\psi}\|$, $\|\ddot{\psi}\|$ oraz długość krzywej $\{\psi(t) : t \in [0, 1]\}$.

Uwaga: Funkcje hiperboliczne bardzo przydadzą się nam mniej więcej w połowie wykładów.

Zadanie 5

Niech

$$r(t) = (v_x \cdot t, -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_y \cdot t + h),$$

gdzie v_x, v_y, g, h są stałymi.

a) Oblicz $\dot{r}, \ddot{r}$.

b) Załóżmy, że $v_{0x} = v_{0y} = 0$ i $h > 0$. Wyznacz T takie, że $r(T) = (0, 0)$ oraz wyznacz $\dot{r}(T)$. Załóżmy teraz, że $g = 10[\frac{m}{s^2}]$. Dla jakiej wartości h mamy $\|\dot{r}(T)\| \approx 10[\frac{m}{s}]$? Do czego może Ci się ta liczba przydać?

Zadanie 6

a) Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą różniczkowalne. Pokaż, że

$$\frac{d}{dt} \langle f(t), g(t) \rangle = \langle \dot{f}(t), g(t) \rangle + \langle f(t), \dot{g}(t) \rangle.$$

b) Niech $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie różniczkowalna. Pokaż, że

$$\frac{d}{dt} \|\phi(t)\|^2 = 2 \langle \phi(t), \dot{\phi}(t) \rangle.$$

Uwaga: Zapamiętaj ten prosty wzór !!!

c) Załóżmy, że $\|\phi(t)\| = r$, czyli, że ruch ϕ odbywa się na sferze o promieniu r . Pokaż, że wtedy $(\forall t)(\phi(t) \perp \dot{\phi}(t))$. Jaka jest interpretacja fizyczna tej obserwacji?

2 Rozgrzewka: Dynamika

Zadanie 7

Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy wypukłym jeśli

$$(\forall P, Q \in A)(\forall t \in [0, 1])(tP + (1-t)Q \in A).$$

Dla skończonego zbioru $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathbb{R}^n$ definiujemy

$$\text{conv}(\mathcal{P}) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i : \alpha_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Zbiór ten nazywamy otoczką wypukłą zbioru $\mathcal{P}$.

a) Pokaż, że $\mathcal{P} \subseteq \text{conv}(\mathcal{P})$.

b) Pokaż, że $\text{conv}(\mathcal{P})$ jest zbiorem wypukłym.

c) Pokaż, że $\text{conv}(\mathcal{P})$ jest zbiorem domkniętym.

d) Pokaż, że $\text{conv}(\mathcal{P})$ jest najmniejszym wypukłym zbiorem domkniętym który zawiera $\mathcal{P}$.

8. Twierdzenie Königa

Rozważmy izolowany układ punktów $x_1, \dots, x_n$ o masach $m_1, \dots, m_n$, oddziałujących między sobą z siłami F_{ij} . Wiemy, że całkowity moment pędu $p = \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i$ jest stały. Niech

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}$$

gdzie $M = \sum_{i=1}^n m_i$. Punkt S nazywamy środkiem masy układu.

a) Pokaż, że $S \in \text{conv}(\{x_1, \dots, x_n\})$.

b) Jakim ruchem porusza się punkt S ?

c) Niech $y_i = x_i - S$. Niech

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

oznacza energią kinetyczną rozważanego układu. Pokaż, że

$$T = \frac{1}{2} M \dot{S}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{y}_i^2.$$

Zadanie 9

Niech $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia równanie $\dot{x}(t) = b$, gdzie b jest stałą. Pokaż, że jest wtedy stała a taka, że $x(t) = a + bt$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Wskazówka: Scałkuj obie strony równania w przedziale $[0, T]$.

Zadanie 10

Niech $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia równanie $\dot{x}(t) = b + ct$, gdzie b jest stałą. Pokaż, że jest wtedy stała a taka, że $x(t) = a + bt + \frac{1}{2}ct^2$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 11

Niech $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia równanie $\dot{x}(t) = bx(t)$, gdzie b jest stałą. Pokaż, że jest wtedy stała a taka, że $x(t) = ae^{bt}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Wskazówka: Przekształć równanie $\dot{x} = bx$ do postaci $\frac{\dot{x}}{x} = b$, no i, oczywiście, przyjrzyj się możliwości $x(t) = 0$ w jakiś punktach t .

Zadanie 12

Niech

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \tag{2.1}$$

dla stałych ω , A i B .

a) Pokaż, że $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$.

b) Pokaż, że dla dowolnych stałych x_0 oraz v_0 istnieje rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

Uwaga: Z Teorii Liniowych Równań Różniczkowych wynika, że każde rozwiązanie równania różniczkowego $\ddot{x} = -\omega^2 x$ jest postaci 2.1 dla pewnych stałych A i B .

Zadanie 13

Niech $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Niech $T(t) = \frac{m}{2} \|\dot{X}(t)\|^2$ oznacza energię kinetyczną punktu materialnego o masie m poruszającego się po krzywej X w chwili t . Niech W oznacza pracę jaką wykonuje pole podczas ruchu obiektu poruszającego się zgodnie z równaniem $m\ddot{X} = F(X)$ między chwilą t_0 a t_1 , czyli

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt .$$

Pokaż, że

$$W = T(t_1) - T(t_0) .$$

Wskazówka: Oblicz $\frac{d}{dt} \|\dot{X}(t)\|^2$.

Zadanie 14

Założmy, że $F = \nabla U$. Niech $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Niech $t_0 < t_1$. Pokaż, że

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle F \circ \phi, \dot{\phi} \rangle dt = U(\phi(t_1)) - U(\phi(t_0)) .$$

Wynioskuj z tego, że praca pola potencjalnego zależy tylko od punktu początkowego i końcowego.

- a) Pokaż, że jeśli praca pewnym polu zależy tylko od punktów początkowych i końcowych drogi, to jest to pole potencjalne.

Wskazówka: Ustal punkt P o określ $U(Q)$ jako pracę pola F na jakiejś drodze łączącej P z Q .

- b) Zauważ, że w polu potencjalnym praca pola na dowolnej pętli (czyli takiej drodze ϕ , że $\phi(t_0) = \phi(t_1)$) jest równa zeru. Pokaż, że własność ta charakteryzuje pola potencjalne.

Zadanie 15

Założmy, że $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ jest gładkim potencjalnym polem wektorowym na płaszczyźnie. Pokaż, że

$$\frac{dF_1}{dy} = \frac{dF_2}{dx} .$$

- a) Niech $F(x, y) = [-y, x]$. Z głównej części zadania wynika, że F nie jest polem potencjalnym. Oblicz pracę pola F na krzywej $\phi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ dla $t \in [0, 2\pi]$.

- b) Wypróbuj polecenie

$$\text{VectorPlot}[\{-y, x\}, \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}]$$

programu Mathematica i wyjaśnij wynik z poprzedniego punktu.

Zadanie 16

Niech

$$U(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

- a) Wyznacz ∇U oraz oblicz $\|\nabla U\|$.

- b) Spróbuj zwizualizować pole wektorowe $-\nabla U$. Możesz skorzystać z polecenie `VectorPlot` systemu Wolfram Alpha.
- c) Uogólnij powyższe rozważania na potencjał $U(x) = \frac{-1}{\|x\|}$ dla $x \in \mathbb{R}^n$.

17. Prędkości kosmiczne

Rozważamy obiekt A o małej masie m poruszający się w polu grawitacyjnym generowanym przez obiekt B o dużej masie M . Możesz założyć więc, że na obiekt A działa centralna o wartości bezwzględnej $F = G \frac{mM}{d^2}$, gdzie d to odległość obiektu A od punktu $(0, 0, 0)$. Ustalmy parametr $r > 0$.

- a) Pierwszą prędkością kosmiczną v_I nazywamy prędkość v obiektu A poruszającego się po orbicie kołowej o promieniu r wokół obiektu B . Wyznacz wzór na v_I .
- b) Drugą prędkością kosmiczną v_{II} nazywamy minimalną prędkość v którą należy nadać obiektowi A aby z początkowej odległości r od obiektu B mógł oddalić się w nieskończoność. Wyznacz wzór na v_{II} .
- c) Wstawiając odpowiednie parametry wyznacz obie prędkości dla Ziemi.

Uwaga: Jeśli Twoje wyprowadzenia wzorów na v_I oraz v_{II} są dłuższe niż cztery linijki, to spróbuj je wyprowadzić ponownie.

C.D.N.

Powodzenia,

Jacek Cichoń