

Grupa 1. Trygonometria

Zadanie 1. Pokaż, że jeśli $z \in \mathbb{C}$ oraz $|z| = 1$ to $z^{-1} = \bar{z}$. Jak się nazywał w szkole średniej ten fakt?

Zadanie 2. Podaj możliwie krótkie wyprowadzenie wzoru na $\cos(2\alpha)$ oraz $\sin(2\alpha)$.

Zadanie 3. Oblicz

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\alpha), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\alpha).$$

Zadanie 4. Zbadaj podstawowe własności pierścienia $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1)$.

Zadanie 5. Do czego wykorzystywany jest pierścień $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ w Informatyce?

Zadanie 6. Zaimplementuj klasę reprezentującą liczbę

$$a + b \cdot j,$$

gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi zaś j jest takim elementem, że $j^2 = -1$. Obsłuż: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, normę definiowaną jako $N(a + bj) = a^2 + b^2$.

Grupa 2. Wielomiany

IDEA: $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow (\mathbb{C}[x], +, \cdot)$

Zadanie 7. Niech $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Niech $\epsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$. Pokaż, że

$$\sum_{t=0}^2 f(\epsilon^t x) = \sum_{3|k} a_k x^k.$$

Zadanie 8. Zastosuj poprzednie zadanie do funkcji $f(x) = (1+x)^n$.

Grupa 3. Funkcje tworzące prawdopodobieństwo

Te zadania służą do przypomnienia sobie kilku pojęć z rachunku prawdopodobieństwa.

Zadanie 9. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w zbiorze $\{0, 1, \dots, n\}$. Wyznacz funkcję tworzącą ϕ_X zmiennej X . Za jej pomocą wyznacz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej X .

Zadanie 10. Niech X będzie zmienną losową o wartościach w zbiorze $\{1, 2, \dots\}$ o rozkładzie geometrycznym z parametrem p , czyli $\Pr[X = n] = p q^{n-1}$. Wyznacz funkcję tworzącą ϕ_X zmiennej X i za jej pomocą wyznacz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej X .

Grupa 4. Transformata Fouriera

Ustalmy $N \geq 1$. Dla $n = 0, \dots, N-1$ definiujemy wektory

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{N}} [\omega^{nk} : 0 \leq k < N],$$

z przestrzeni $\mathbb{C}^{\{0,1,\dots,N-1\}}$, gdzie $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

Zadanie 11. Oblicz $\|B_n\|$.

Zadanie 12. Pokaż, że jeśli $0 \leq n < m < N$ to $B_n \perp B_m$.

Zadanie 13. Niech $X \in \mathbb{C}^{\{0,1,\dots,N-1\}}$. Oblicz $\langle X, B_n \rangle$ oraz pokaż, że $X = \sum_{n=0}^{N-1} \langle X, B_n \rangle B_n$

Zadanie 14. Zaimplementuj transformatę Fouriera. Może to być to być procedura działające w czasie $O(n^2)$, gdzie n to długość ciągu.

Grupa 5. Monady

W tej grupie zadań chodzi o omówienie metody zanurzania obliczeń $f : X \rightarrow Y$ w obliczenia $W(f) : W(X) \rightarrow W(Y)$ za pomocą funkcji $\tilde{f} : X \rightarrow W(Y)$.

Zadanie 15. Zaimplementuj w C strukturę `WriterInt`, przechowującą liczbę całkowitą oraz dziennik wykonanych operacji. Zaimplementuj funkcje `unit`, `bind`, `tell`, a następnie napisz kalkulator wyrażeń arytmetycznych, który oprócz wyniku zwraca pełny ślad obliczeń.

Przetestuj ją na na obliczeniach typu $5 \rightarrow (5 + 2) \rightarrow (5 + 2) \cdot 3 \rightarrow ((5 + 2) \cdot 3)^2$.

Zadanie 16. Zmodyfikuj monadę z poprzedniego zadania tak aby działała ona na parach liczb typu `(int, int)`. Zastosuj ją do śledzenia obliczeń wyznaczania gcd.