Analiza II - definicje, fakty, twierdzenia

Jacek Cichoń
WPPT PWr, 2011

Geometria przestrzeni $\mathbb{R}^n$

1. Iloczyn skalarny $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
2. Norma: $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
3. Baza standardowa: $e_1 = (1, 0, , \ldots , 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots , 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, 0, \ldots , 0, 1)$
4. Jeśli $x = (x_1, x_2, \ldots , x_n)$ to $x_i = \langle x, e_i\rangle$
5. Cauchy: $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$
6. $\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cos(\alpha)$
7. Odległośc euklidesowa $d_e(x, y) = |x - y|$
8. Nierówność trójkąta: $d_e(x, z) \leq d_e(x, y) + d_e(y, z)$

Przestrzeń metryczna

Przestrzenią metryczną nazywamy parę (X, d) taką, że X jest niepustym zbiorem oraz $d : X \times X \to [0, \infty)$ jest funkcją spelniająca warunki:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Przykłady:

1. $(\mathbb{R}, d)$, gdzie $d(x, y) = |x - y|$
2. $(\mathbb{R}^n, d_e)$
3. $(\mathbb{R}^2, d_1)$, gdzie $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
4. $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$, gdzie $d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

Def. Kula: $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$
Def. Zbiór $U \subseteq X$ jest otwarty jeśli

$$(\forall a \in U)(\exists \epsilon > 0)(B(a, \epsilon) \subseteq U) .$$

Def. Zbiór $D \subseteq X$ jest domknięty jesli $X \setminus D$ jest otwarty.
Tw. Pozdbiór $D \subseteq X$ jest domkniety wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbieżnego ciągu (x_n) elementów zbioru D mamy $\lim_n x_n \in D$.

Zbieżność ciągów

Def. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, niech (x_n) będzie ciągiem punktów przestrzeni X oraz niech $g \in X$. Mówimy, że ciąg (x_n) jest zbieżny do g ($\lim_n x_n = g$) jeśli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(d(x_n, g) < \epsilon).$$

Tw. Niech (x_n) będzie ciągiem elementów przestrzeni $\mathbb{R}^m$ oraz niech $g \in \mathbb{R}^m$. Następujące warunki są równoważne:
1. $\lim_n x_n = g$
2. $(\forall i = 1 \ldots m)(\lim_n \langle x_n, e_i\rangle = \langle g, e_i\rangle)$.

Przykład:

$$\lim_n \left(\frac{n}{n+1}, \sqrt[n]{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = (1, 1, e)$$

Ciągłość

Def. Niech (X, d), (Y, ρ) będą dwoma przestrzeniami metrycznymi, $f : X \to Y$, $a \in X$ oraz $b \in Y$. Mówimy, że $\lim_{x\to a} f(x) = b$ jeśli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) 0 < (d(x, a) < \delta \to \rho(f(x), b) < \epsilon)$$

Tw. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu punktów (x_n) zbieżnego do a różnych od a mamy $\lim_n f(x_n) = b$.
Def. Niech (X, d), (Y, ρ) będą dwoma przestrzeniami metrycznymi, $f : X \to Y$. Funkcja f jest ciagła w punkcie $a \in X$ jeśli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d(x, a) < \delta \to \rho(f(x), f(a)) < \epsilon)$$

Tw. f jest ciągła w $a \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu punktów (x_n) zbieżnego do a mamy $\lim_n f(x_n) = f(a)$.
Tw. Złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe.
Tw. Funkcja $f = (f_1, \ldots , f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła w punkcie $a \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje $f_1, \ldots f_m$ są ciągłe w punkcie a.
Tw. Funkcje $s(x, y) = x + y$, $m(x, y) = x \cdot y$, $i(x, y) = x/y$ są ciągłe.

Różniczkowanie

Def. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w $a \in \mathbb{R}^n$ jeśli istnieje odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(a + x) - (f(a) + L(x))|}{|x|} = 0$$

Odwzorowanie L oznaczamy przez $f'(a)$ lub $(Df)(a)$
Def. i-tą pochodną cząstkową funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w punkcie $a \in \mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

Tw. Niech $f = (f_1, \ldots , f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie różniczkowalna w punkcie a. Wtedy

$$M_{f'(a)} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots m}$$

Przykład: Niech $f(x, y) = (x \cdot y, e^x + y^2)$. Wtedy

$$M_{f'(a,b)} = \begin{bmatrix} b & a \\ e^a & 2b \end{bmatrix}$$

Tw. Jeśli wszystkie pochodne cząstkowe są ciągłe w otoczeniu punktu a to funkcja jest rózniczkowalna w punkcie a
Uwaga: istnienie wszystkich pochodnych cząstkowych nie gwarantuje istnienia pochodnej.
Tw. Jeśli drugie pochodne cząstkowe sa ciągłe, to

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} .$$

Gradient

Def. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$. Pochodną kierunkową funkcji f w pukcie a w kierunku b nazywamy liczbę

$$D_b f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tb) - f(a)}{t} .$$

Tw. $D_b f(a) = (f'(a))(b)$
Def. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Gradientem f w punkcie a nazywamy wektor

$$\nabla_a f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots , \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right]$$

Tw. $D_b f(a) = \langle\nabla_a f, b\rangle$
Wniosek: $\nabla_a f$ jest kierunkiem najszybszego wzrostu funkcji.
Oznaczenie: Dla $h = (h_1, \ldots , h_n)$:

$$D_h = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right\}$$

Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych: Jeśi wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f rzędu $\leq k + 1$ istnieją w pewnym otoczeniu punktu $x \in \mathbb{R}^n$, to

$$f(x + h) = f(x)+$$
$$((D_h)(f))(x) + \frac{1}{2!}((D_h)^2(f))(x) + \frac{1}{3!}((D_h)^3(f))(x) + \ldots +$$
$$\frac{1}{k!}((D_h)^k(f))(x) + \frac{1}{(k+1)!}((D_h)^{k+1}(f))(x + \theta h)$$

dla pewnego $\theta \in (0, 1)$.

Lokalne ekstrema

Tw. [Warunek konieczny] Jeśli $f : \mathbb{R}^n$ ma lokalne ekstremum w punkcie a, to dla każdego $i = 1, \ldots , n$ mamy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ (czyli $\nabla_a f = 0$)
Def. Hesjanem funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w punkcie a nazywamy macierz

$$\nabla^2_a f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1,\ldots,n}$$

Tw. Jeśli $\nabla_a f = 0$ i $\nabla^2_a f$ jest dodatnio (ujemnie) określony, to funkcja f ma lokalne minimum (lokalne maksimum) w punkcie a.
KRYTERIUM SYLVERTA: Dla macierzy kwadratowej $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ wprowadzamy oznaczenie $M[k] = (M_{i,j})_{i,j,=1\ldots,k}$
1. M jest **dodatnio określona** jeśli $(\forall k = 1..n)(\det(M[k]) > 0)$,
2. M jest **ujemnie określona** jeśli $(\forall k = 1..n)((-1)^k \det(M[k]) > 0)$,