Podstawy

WPPT PWr

Oznaczenia

1. Zbiór liczb naturalnych: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
2. Zbiór liczb całkowitych: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, -, 1, 2, \ldots\}$
3. Zbiór liczb wymiernych: $\mathbb{Q}$
4. Zbiór liczb rzeczywistych: $\mathbb{R}$
5. (a, b): zbiór liczb rzeczywistych x takich, że $a < x < b$

Liczby wymierne

Liczbami wymiernymi nazywamy liczby postaci $\frac{k}{n}$, gdzie k jest liczba całkowitą a n jest liczbą naturalną dodatnią.

1. dodawanie: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$
2. mnożenie: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
3. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Liczby rzeczywiste

Podstawowe własności

1. zero jest elementem neutralnym dodawania: $0 + x = x + 0 = x$
2. jedynka jest elementem neutralmym mnożenia: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
3. przemienność dodawania: $x + y = y + x$
4. przemienność mnożenia : $x \cdot y = y \cdot x$
5. łączność dodawania: $x + (y + z) = (x + y) + z$
6. łączność mnożenia : $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
7. rozdzielność mnożenia wzgledem dodawania: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
8. brak dzielników zera: $x \cdot y = 0 \to (x = 0 \vee y = 0)$

Wzory

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$
2. $(x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$
3. $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$
4. $(x + y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$

Wartość bezwzględna

$$|x| = \begin{cases} x & : \quad x \geq 0 \\ -x & : \quad x < 0 \end{cases}$$

- $|x - a| < r \iff x \in (a - r, a + r)$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$

Potęgowanie

Niech a będzie dodatnią liczbą rzeczywistą oraz niech b i c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy

1. $a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$
2. $a^b a^c = a^{b+c}$
3. $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

Logarytm

Def. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$ to $c = \log_a(b) \iff a^c = b$
Niech $a, b, c > 0$. Wtedy

1. $a^{\log_a(b)} = b$
2. $\log_a(a) = 1$
3. $\log_a(a^b) = b$
4. $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

Ważne wzory

1. $1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Jeśli $q \neq 1$ to $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Elementy Geometrii

Wszystkie fakty w tej części dotyczą geometrii euklidesowej.

Tw. Powierzchnia prostokata o bokach a i b jest równa $a \cdot b$ a jego obwód wynosi $2 \cdot (a + b)$.

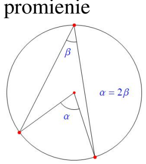
Trójkaty

Tw. Suma katow wewnętrznych w dowolnym trójkącie wynosi $180°$ (czyli π).
Tw. Powierzchnia trójkąta o podstawie a i wysokości h wynosi $\frac{1}{2} a \cdot h$.
Tw. **(Pitagoras)** Jeśli a i b są długościami przyprostokątnych oraz c jest długością przeciwprostokątnej w trójkącie prostokatnym, to

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Koło

Tw. Obwód koła o promieniu r jest równy $2 \cdot \pi \cdot r$.
Tw. Powierzchnia koła o promieniu r jest równa $\pi \cdot r^2$.
Def. Kątem wpisanym nazywamy kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona zawierają pewne cięciwy tego koła
Def. Kątem środkowym nazywamy kąt, którego wierzchołek leży w środku okręgu, a ramiona wyznaczone są przez wychodzące z niego promienie



Tw. Miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Elementy geometrii analitycznej

Odległość między punktami $P = (x_1, y_1)$ i $Q = (x_2, y_2)$ wyraża się wzorem

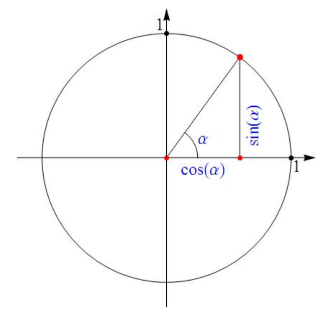
$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Równanie okręgu o środku w punkcie $P = (a, b)$ i promieniu r:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\ .$$

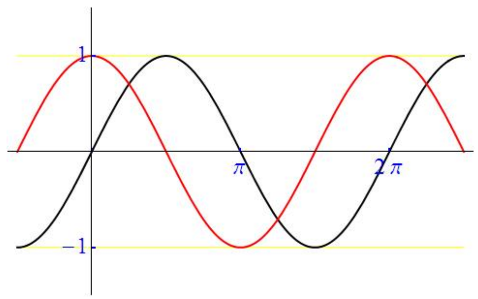
Podstawy trygonometrii

Punkt przecięcia okręgu jednostkowego z połprostą zaczynającą się w punkcie $(0, 0)$ i nachyloną pod kątem α ma współrzędne $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ , \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Wykres funkcji sinus i cosinus



Kolor czarny: $y = \sin(x)$, kolor czerwony $y = \cos(x)$.

Podstawowe wzory

1. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
2. $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
3. $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
4. $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

Funkcje elementarne

Funkcje liniowe

Def. Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją liniową jeśli

$$f(x) = a \cdot x + b$$

dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
Wykres funkcji liniowej jest linia prostą. Współczynnik a nazywa się współczynnikiem kierunkowym lub kątowym. Odpowiada on za nachylenie względem osi OX. Jeśli $a = 0$ to funkcję $y = 0 \cdot x + b = b$ nazywamy funkcja stałą.
Współczynnik b nazywany jest wyrazem wolnym. Wykres funkcji liniowej $y = a \cdot x + b$ przecina się z osią OY w punkcie $(0, b)$.

Funkcje kwadratowe

Def. Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją kwadratową jeśli

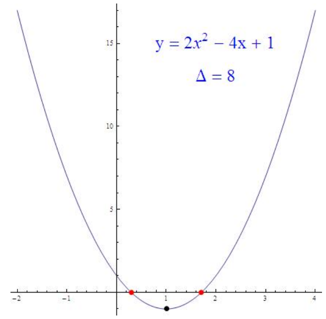
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ oraz wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Def. **Postać kanoniczna funkcji kwadratowej**: Funkcję zadaną wzorem $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ możemy zapisac w postaci

$$f(x) = a \cdot (x - p)^2 + q$$

gdzie $p = -\frac{b}{2a}$ oraz $q = \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{2a}$.



Wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem $f(x) = a \cdot (x - p)^2 + q$ jest parabolą. Jej wierzchołkiem jest punkt (p, q). Ramiona paraboli sa skierowane “w górę” jeśli $a > 0$ oraz “w dół” jeśli $a < 0$.
Def. Wyróżnikiem funkcji $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ nazywamy liczbę $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
Tw. Równanie $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $\Delta \geq 0$. Jeśli $\Delta \geq 0$ to pierwiastki tego równania wyrażają sie wzorami

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$